

# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

## Série avec correction ensembles et application

PROF : ATMANI NAJIB

Application : injective et surjective et bijective

Exercice 1: Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = 3x + 5$

1.  $f$  ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 : Soit l'application  $f$  définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = |2x + 5|$$

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2 - 1$

1.  $f$  ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Soit à présent  $g: ]1, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que  $g(x) = x^2 - 1$  ; montrer que  $g$  est bijective et donner l'expression de sa fonction inverse.

Exercice 4 : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1.  $f$  ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que l'application  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  telle que  $g(x) = f(x)$  est une application bijective.

Exercice 5 : Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ . L'application  $f$  ainsi définie est-elle bijective ?

Exercice 6 : Soit l'application  $f$  définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\ x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

2.  $f$  est-elle injective ?
3.  $f$  est-elle surjective ?
4. Donner l'expression de  $(f \circ f)(x)$ .
5. Par deux méthodes différentes, retrouver l'expression de  $f^{-1}(x)$ .

Exercice 7 : (Supplémentaire) Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels non nuls donnés, et soit  $g$  définie comme suit :

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{y_0\} \\ x \mapsto g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1. Comment doit-on choisir le réel  $x_0$  pour que  $g$  soit une application ?
2. Comment doit-on choisir  $a, b, c$  et  $d$  pour que  $g$  soit une application injective ?
3. Comment doit-on choisir  $a, b, c, d$  et le réel  $y_0$  pour que  $g$  soit une application surjective ?
4. Comment doit-on choisir  $a, b, c, d, x_0$  et  $y_0$  pour que  $g$  soit une application bijective ?

Exercice 8 : (Supplémentaire) On considère quatre ensembles  $A, B, C$  et  $D$  et des applications  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ . Montrer que :

1.  $(g \circ f)$  injective  $\Rightarrow f$  injective
2.  $(g \circ f)$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective
3.  $((g \circ f)$  et  $(h \circ g)$  bijectives)  $\Leftrightarrow (f, g$  et  $h$  sont bijectives)

**Correction : Série avec correction ensembles et application**

Corrigé Fiche de TD 2.

Exercice 1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 5.$$

1- Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Donc  $f$  est injective.

2- Soit  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) \Rightarrow y = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$ .

Donc  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $\exists x \in \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ ; Donc  $f$  est surjective.

3-  $f$  étant injective et surjective  $f$  est donc bijective.

Exercice 2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |2x + 5| = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \geq -5/2 \\ -2x - 5 & \text{si } x \leq -5/2 \end{cases}$$

1- Soit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |2x_1 + 5| = |2x_2 + 5|$ .

il y'a 4 cas possibles si  $x_1 \geq -5/2$  et  $x_2 \geq -5/2$  on trouve  $x_1 = x_2$ .

si  $x_1 \leq -5/2$  et  $x_2 \leq -5/2$  on trouve  $x_1 = x_2$ .

par contre si  $x_1 \geq -5/2$  et  $x_2 \leq -5/2$  (ou  $x_1 \leq -5/2$  et  $x_2 \geq -5/2$ )

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = -2x_2 - 5 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = -10 \Rightarrow x_1 + x_2 = -5.$$

par exemple  $x_1 = 0 \geq -5/2$  et  $x_2 = -5 \leq -5/2$ .

$$f(x_1) = f(0) = 5; \quad f(x_2) = f(-5) = 5 \quad \text{Donc } f(0) = f(-5) \text{ mais } 0 \neq -5$$

Donc  $f$  n'est pas injective. (Donc  $f$  n'est pas bijective).

2- Soit  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) \Rightarrow y = |2x + 5|$ .

si  $y < 0$  ( $y = -3$  par exemple) l'équation  $y = |2x + 5|$  ne possède pas de

solution car  $|2x + 5| \geq 0$ ; Donc  $f$  n'est pas surjective (Donc  $f$  n'est pas bijective)

Exercice 3:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 1.$$

1- Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2.$$

par exemple:  $x_1 = 2, x_2 = -2$ ,  $f(x_1) = f(x_2) = 3$  mais  $x_1 \neq x_2$ , Donc  $f$  n'est pas injective!

• Soit  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2$ .

si  $(y + 1 < 0)$  i.e.  $(y < -1)$  l'équation  $y = x^2 - 1$  ne possède pas de solution, par exemple  $y = -3$ ;  $-3 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -2$   
 cette équation ne possède pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . donc  $f$  n'est pas surjective.

2-  $g: [1, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ ;  $g(x) = x^2 - 1$ .

•  $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ ;  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$  ou  $x_1 = -x_2$  ←  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  refusé  
 $\Rightarrow x_1 = x_2$   $g$  est injective.

•  $y \in [0, +\infty[$ ;  $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y + 1}$ .

$y \in [0, +\infty[$  donc  $y + 1 > 0$ ;  $x = \pm \sqrt{y + 1}$  on observe que

$y \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y + 1} \geq 1$  donc  $\sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$ .

Donc  $\forall y \in [0, +\infty[$ ;  $\exists x = \sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$ ; tel que  $y = g(x)$ . - Donc  $g$  surjective.

•  $g$  est donc bijective  $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y + 1}$ .

on accepte  $x = +\sqrt{y + 1} \in [1, +\infty[$  et on rejette  $x = -\sqrt{y + 1}$ .

$y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$  Donc  $g^{-1}: [0, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[$   
 $x \longmapsto g^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$

EXERCICE 4:  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ .

1- Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1 + x_1^2} = \frac{2x_2}{1 + x_2^2} \Rightarrow 2x_2(1 + x_1^2) = 2x_1(1 + x_2^2)$   
 $\Rightarrow x_2 + x_2x_1^2 = x_1 + x_1x_2^2 \Rightarrow x_2 - x_1 + x_2x_1^2 - x_1x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1) + x_1x_2(x_1 - x_2) = 0$   
 $\Rightarrow (x_2 - x_1)(1 - x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$  ou  $x_1x_2 = 1$ .

En prenant  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 1/2$  ( $x_1x_2 = 1$ ) on a  $f(x_1) = f(x_2) = \frac{4}{5}$  et  $f(2) = f(1/2) = \frac{4}{5}$ .  
 Donc  $f(2) = f(1/2)$  mais  $1/2 \neq 2$  donc  $f$  n'est pas injective.

2- Soit  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1 + x^2} \Rightarrow y(1 + x^2) = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ .

équation à résoudre en  $x$ ;  $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$ .

si  $y > 1$  ou  $y < -1$   $\Delta < 0$ . pas de solution

(2)

Si on prend par exemple  $y=3$ ;  $y=f(x) \Rightarrow 3 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0$ .

$\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$  donc l'équation  $3=f(x)$  ne possède pas de solution  $x$ .  
 $y=3$  ne possède pas d'antécédent. par  $f$ ; donc  $f$  n'est pas surjective.

2.  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ;  $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

• Soit  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ;  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  ou  $x_1 x_2 = 1$ .

$x_1 x_2 = 1$  est rejeté car  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$   $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$

Si  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{x} \leq -1$ . Le cas limite  $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$   
 $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$ .

Donc  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  donc  $g$  injective.

• Soit  $y \in [-1, 1]$ ,  $y = g(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ .

$\Delta = 4(1-y^2)$  Comme  $y \in [-1, 1]$   $\Delta > 0$

Donc l'équation  $yx^2 - 2x + y = 0$  possède une solution  $x$   
Il reste à vérifier que cette solution  $x$  appartient à  $[-1, 1]$  (car  $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ )

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$$

Si  $y=0 \Rightarrow x=0 \in [-1, 1]$

$x_2 \in [-1, 1]$   $1 + \sqrt{1-y^2} \geq 1$  et  $y \in [-1, 1] \Rightarrow x_2 \in [-1, 1]$ .

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{(1 - \sqrt{1-y^2})(1 + \sqrt{1-y^2})}{y(1 + \sqrt{1-y^2})} = \frac{1 - (1-y^2)}{y(1 + \sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y^2}}$$

Comme  $1 + \sqrt{1-y^2} \geq 1$  et  $y \in [-1, 1]$  alors  $x_1 \in [-1, 1]$

$\forall y \in [-1, 1], \exists x = x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1], y = g(x)$  donc  $g$  surjective.  
! si  $y=0, \exists x=0, y=f(x)$

EX5: Il suffit de remarquer par exemple que  $f$  n'est pas injective  $f(x, y) = f(y, x)$

Donc par exemple  $f(2, 5) = f(5, 2)$  mais  $(2, 5) \neq (5, 2)$   $f$  n'est pas injective donc pas bijective.