

## Dénombrement

---

### Exercice 1

Pour  $A, B$  deux ensembles de  $E$  on note  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Pour  $E$  un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A\Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

### Exercice 2

En utilisant la fonction  $x \mapsto (1+x)^n$ , calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k ; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

### Exercice 3

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1.  $2^n + 1$  est divisible par 3 si et seulement si  $n$  est impair ;
2.  $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$  est divisible par 7.

### Exercice 4 \*\*I

On part du point de coordonnées  $(0,0)$  pour rejoindre le point de coordonnées  $(p,q)$  ( $p$  et  $q$  entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

### Exercice 5

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

### Exercice 6 Permutations

Combien y a-t-il de bijections  $f$  de  $\{1, \dots, 12\}$  dans lui-même possédant :

1. la propriété :  $n$  est pair  $\Rightarrow f(n)$  est pair ?
2. la propriété :  $n$  est divisible par 3  $\Rightarrow f(n)$  est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

**Exercice 7**

---

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  ?

**Indication pour l'exercice 1**

---

Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !).

Pour  $A$  et  $B$  deux ensembles finis quelconques, commencer par (re)démontrer la formule :  $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$ .

---

**Indication pour l'exercice 2**

---

Évaluer  $(1+x)^n$  en  $x=1$ , d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver  $x \mapsto (1+x)^n$ .

---

**Indication pour l'exercice 3**

---

Commencer par  $2^n = (3-1)^n$ .

---

**Indication pour l'exercice 4**

---

Coder un chemin par un mot :  $D$  pour droite,  $H$  pour haut.

---

**Indication pour l'exercice 5**

---

Petits rappels : dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" (1 = As, 2, 3, ..., 10, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'importe pas.

---

**Indication pour l'exercice 7**

---

Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de  $A$  ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de  $E \setminus A$  ?

---

### Correction de l'exercice 1

Tout d'abord si deux ensembles finis  $A$  et  $B$  sont disjoints alors  $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B$ .

Si maintenant  $A$  et  $B$  sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons  $A \cup B$  en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc :  $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A \setminus (A \cap B) + \text{Card } B \setminus (A \cap B) + \text{Card } A \cap B$ .

Mais pour  $R \subset S$  nous avons  $\text{Card } S \setminus R = \text{Card } S - \text{Card } R$ .

Donc  $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A - \text{Card } A \cap B + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B + \text{Card } A \cap B$ .

Donc  $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$ .

Appliquons ceci à  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  :

$$\text{Card } A \Delta B = \text{Card } A \cup B - \text{Card } A \cap B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

### Correction de l'exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $f(x) = (1+x)^n$ . Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

1. En calculant  $f(1)$  nous avons  $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ .

2. En calculant  $f(-1)$  nous avons  $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$ .

3. Maintenant calculons  $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$ . Évaluons  $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k$ .

4. Il s'agit ici de calculer la primitive  $F$  de  $f$  qui correspond à la somme :  $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$ . En  $F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$ .

### Correction de l'exercice 3

L'astuce consiste à écrire  $2 = 3 - 1$  (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où  $3 \times p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) représente les  $n$  premiers termes de  $\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$  et  $(-1)^n$  est le dernier terme. Donc  $2^n - (-1)^n = 3p$ . Si  $n$  est impair l'égalité s'écrit  $2^n + 1 = 3p$  et donc  $2^n + 1$  est divisible par 3. Si  $n$  est pair  $2^n - 1 = 3p$  donc  $2^n + 1 = 3p + 2$  qui n'est pas divisible par 3.

Pour l'autre assertion regarder  $3 = 7 - 4$ .

### Correction de l'exercice 4

On pose  $H =$  "vers le haut" et  $D =$  "vers la droite". Un exemple de chemin de  $(0,0)$  à  $(p,q)$  est le mot  $DD...DHH...H$  où  $D$  est écrit  $p$  fois et  $H$  est écrit  $q$  fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du  $H$  est  $C_{p+q}^q$ . Une fois que les lettres  $H$  sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres  $D$ . Il y a donc  $C_{p+q}^q$  chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres  $D$  alors on a  $C_{p+q}^p$  choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car  $C_{p+q}^p = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^q$ .

### Correction de l'exercice 5

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc  $C_{52}^5$  mains différentes. Ceci peut être calculé :  $C_{52}^5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960$ .

2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan  $4 \times C_{48}^4$  mains comprenant exactement un as.
  3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets); il y a donc  $C_{48}^5$  mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc  $C_{52}^5 - C_{48}^5$ .
  4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est  $C_{48}^5$  (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi  $C_{48}^5$ . Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame n'est pas  $C_{48}^5 + C_{48}^5$ , car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a  $C_{44}^5$  telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc :  $2C_{48}^5 - C_{44}^5$  (on retire une fois les mains comptées deux fois !). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc :  $C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$ .
- 

### Correction de l'exercice 6

---

1.  $(6!)^2$
  2.  $4! \times 8!$
  3.  $2!2!4!4!$
  4.  $6^6 \times 12^6, 4^4 \times 12^8, 2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$ .
- 

### Correction de l'exercice 7

---

Fixons un élément de  $A$ ; dans  $E \setminus A$  (de cardinal  $n - p$ ), nous pouvons choisir  $C_{n-p}^k$  ensembles à  $k$  éléments ( $k = 0, 1, \dots, n-p$ ). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de  $A$  est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de  $A$  nous avons  $p$  choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$


---