

# Trigonométrie circulaire

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice n° 1 (\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, 2\pi]$  les équations suivantes :

1)  $\sin x = 0$    2)  $\sin x = 1$    3)  $\sin x = -1$    4)  $\cos x = 1$    5)  $\cos x = -1$   
6)  $\cos x = 0$    7)  $\tan x = 0$    8)  $\tan x = 1$ .

## Exercice n° 2 (\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, 2\pi]$  les équations suivantes :

1)  $\sin x = \frac{1}{2}$    2)  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$    3)  $\tan x = -1$    4)  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$    5)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$    6)  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## Exercice n° 3 (\*\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans I les équations suivantes :

1)  $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$    2)  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , I =  $[0, 4\pi]$    3)  $\tan(5x) = 1$ , I =  $[0, \pi]$   
4)  $\cos(2x) = \cos^2 x$ , I =  $[0, 2\pi]$    5)  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ , I =  $[0, 2\pi]$    6)  $\cos(nx) = 0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )  
7)  $|\cos(nx)| = 1$    8)  $\sin(nx) = 0$    9)  $|\sin(nx)| = 1$   
10)  $\sin x = \tan x$ , I =  $[0, 2\pi]$    11)  $\sin(2x) + \sin x = 0$ , I =  $[0, 2\pi]$    12)  $12 \cos^2 x - 8 \sin^2 x = 2$ , I =  $[-\pi, \pi]$ .

## Exercice n° 4 (\*\*IT)

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1)  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ , I =  $[-\pi, \pi]$    2)  $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , I =  $\mathbb{R}$    3)  $\cos x > \cos \frac{x}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$   
4)  $\cos^2 x \geq \cos(2x)$ , I =  $[-\pi, \pi]$    5)  $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$    6)  $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}$ , I =  $[0, 2\pi]$ .

## Exercice n° 5 (\*I)

Calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

## Exercice n° 6 (\*I)

Calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

## Exercice n° 7 (\*\*\*)

Montrer que  $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$  (la somme comporte  $2^n$  termes).

## Exercice n° 8 (\*\*\*)

1) Calculer  $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$  pour a élément donné de  $]0, 2\pi[$  (penser à  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ).

2) Pour  $a \in ]0, \pi[$ , déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$ .

## Exercice n° 9 (\*\*)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$ .

## Exercice n° 10 (\*\*\*)

Soit a un réel distinct de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

1) Calculer  $\tan(3\theta)$  en fonction de  $\tan \theta$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

**Exercice n° 11 (\*\*\*)** Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans  $[0, \pi]$  ?

**Exercice n° 12 (\*\*I)**

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lllll} 1) x \mapsto \cos^2 x & 2) x \mapsto \cos^4 x & 3) x \mapsto \sin^4 x & 4) x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x & 5) x \mapsto \sin^6 x \\ 6) x \mapsto \cos x \sin^6 x & 7) x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x & 8) x \mapsto \cos^3 x. & & \end{array}$$

**Exercice n° 13 (\*\*I)**

$$\text{Calculer } I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx \text{ et } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx.$$

**Exercice n° 14 (\*\*)**

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} & 2) \sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ 3) \tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2}{\cos(2x)} & 4) \frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}. \end{array}$$

**Exercice n° 15 (\*\*\*)**

Soit  $k$  un réel distinct de  $-1$  et de  $1$ .

1) Etudier les variations de  $f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}}$ .

2) Calculer  $\int_0^\pi f_k(x) \, dx$ .

**Exercice n° 16 (\*\*I)**

Calculer les sommes suivantes :

1)  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ , ( $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  donnés).

2)  $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$ , ( $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  donnés).

3)  $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx)$ , ( $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  donnés).

**Exercice n° 17 (\*\*\*)**

Résoudre le système  $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels.

**Exercice n° 18 (\*\*)**

Montrer que  $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ .

**Exercice n° 19 (\*\*\*)**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(3x) = \sin(2x)$ .

2) En déduire les valeurs de  $\sin x$  et  $\cos x$  pour  $x$  élément de  $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}$ .

**Exercice n° 20 (\*\*IT)**

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1)} f_1 : x \mapsto 2 \cos(x) + \cos(2x) & \mathbf{2)} f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} \\ \mathbf{3)} f_3 : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x) & \mathbf{2)} f_4 : x \mapsto \frac{2 \sin(x) + 1}{2 \cos(x) + 1} \end{array}$$

## Planche n° 12. Trigonométrie circulaire : corrigé

### Exercice n° 1

- 1)  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$ .
- 2)  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .
- 3)  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ .
- 4)  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$ .
- 5)  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$ .
- 6)  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ .
- 7)  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$ .
- 8)  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ .

### Exercice n° 2

- 1)  $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ .
- 2)  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ .
- 3)  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$  et  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ .
- 4)  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$  et  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ .
- 5)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ .
- 6)  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ .

### Exercice n° 3

- 1)  $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$ .
- 2)  $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$ .
- 3)  $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$ .
- 4)  $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$ .
- 5)  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$  ou  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$ .  
De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$ .
- 6)  $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ .
- 7)  $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ .
- 8)  $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ .
- 9)  $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ .
- 10)  $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$  ou  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$ .

**11) 1ère solution.**

$$\sin(2x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = \pi - (x + \pi) + 2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{2k\pi}{3})$$

De plus,  $\mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\}$ .

**2ème solution.**

$$\sin(2x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$$

**12)**

$$12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left( -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left( \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

De plus,  $\mathcal{S}_{[-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$ .

**Exercice n° 4**

1) Pour  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ -\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}, \pi \right]$ .

2) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right]$ .

3) Pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$\cos x > \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \left( 2\cos \frac{x}{2} + 1 \right) \left( \cos \frac{x}{2} - 1 \right) > 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi \right[ \Leftrightarrow x \in \left] \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right[.$$

4) Pour  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\cos^2 x \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$ .

5) Pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$ .

6) Pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2k\pi \leq \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leq x \leq 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$$

**Exercice n° 5**

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ et donc, puisque } \cos \frac{\pi}{8} > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

De même,  $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( 2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$  et donc, puisque  $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ ,

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

### Exercice n° 6

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

### Exercice n° 7

Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)}$ .

- $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2 \cos a_1$
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$  et montrons que  $S_{n+1} = 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_n \cos a_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} \\ &= 2 \cos a_{n+1} S_n \\ &= 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :  $\forall n \geq 1, S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ .

Ensuite, pour  $n \geq 1$ ,  $\sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$  (on obtient aussi  $\sum \sin(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Im}(S_n) = 0$ ).

### Exercice n° 8

1) Si  $a$  est dans  $]0, 2\pi[$  alors, pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $\frac{a}{2^k}$  est dans  $]0, \pi[$  et donc  $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$ . De plus, puisque  $\sin \left( 2 \frac{a}{2^k} \right) = 2 \sin \left( \frac{a}{2^k} \right) \cos \left( \frac{a}{2^k} \right)$ , on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) &= \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left( \frac{a}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left( \frac{a}{2^k} \right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left( \frac{a}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left( \frac{a}{2^k} \right)} \\ &= \frac{\sin a}{2^n \sin \left( \frac{a}{2^n} \right)} \text{ (produit télescopique).} \end{aligned}$$

2)  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) > 0$  car  $\frac{a}{2^k}$  est dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) \right) = \ln \left( \prod_{k=1}^n \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) \right) = \ln \left( \frac{\sin a}{2^n \sin \left( \frac{a}{2^n} \right)} \right) = \ln \left( \frac{\sin a}{a} \right) - \ln \left( \frac{\sin \left( \frac{a}{2^n} \right)}{\frac{a}{2^n}} \right).$$

Maintenant,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( \cos \left( \frac{a}{2^k} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{\sin a}{a} \right) - \ln \left( \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \right) \right) = \ln \left( \frac{\sin a}{a} \right).$$

### Exercice n° 9

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{1 - 4 \cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4 \cos^2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4 \cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4 \cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4 \cos^2 x} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} \text{ est solution de l'équation } X^2 - 10X + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4 \cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x = 1 \text{ ou } 4 \cos^2 x = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \mathbb{Z}}{2} \right) \cup \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi \mathbb{Z}}{2} \right). \end{aligned}$$

### Exercice n° 10

1) Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Ensuite,  $\tan(3\theta)$  et  $\tan \theta$  existent  $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}$  et  $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \mathbb{Z}}{3}$ .

Soit donc  $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \mathbb{Z}}{3}$ .

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta}{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul  $\cos^3 \theta$ .

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \mathbb{Z}}{3} \right), \tan(3\theta) = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}.$$

2) Soit  $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**1ère méthode.**  $a$  est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \text{ (car } \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)} \\ &\Leftrightarrow (3a^2 - 1)x^3 - 3(a^3 - 3a)x^2 - 3(3a^2 - 1)x + a^3 - 3a = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme  $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$  vaut :

$$\Delta' = 16a^2 - (3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 3a^4 + 6a^2 + 3 = (\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\mathcal{S} = \left\{ a, \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}, \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2} \right\}.$$

**2ème méthode.** Il existe un unique réel  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\}$  tel que  $a = \tan \alpha$  et de même, si  $x$  est un réel distinct de  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , il existe un unique réel  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\}$  tel que  $x = \tan \theta$  (à savoir  $\alpha = \text{Arctan } a$  et  $\theta = \text{arctan } x$ ).  
Comme  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha) \\ &\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions  $x = \tan \alpha = a$ , puis

$$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan \alpha \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2},$$

$$\text{et } x = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}.$$

### Exercice n° 11

Pour  $x \in [0, \pi]$ , posons  $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x, \tan(2x), \tan(3x) \text{ et } \tan(4x) \text{ existent} \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\pi\mathbb{Z}\right), \left(x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}. \end{aligned}$$

$f$  est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8} \cup \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6} \cup \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \cup \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} \cup \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} \cup \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} \cup \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \cup \frac{7\pi}{8}, \pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents,  $f$  est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de  $f$  à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans  $[0, \pi]$ .

Sur  $I = \left[0, \frac{\pi}{8} \cup \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi\right]$ , puisque  $f(0) = f(\pi) = 0$ , (E) a exactement une solution dans  $I$ . Ensuite, dans l'expression de somme  $f$ , une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de  $\frac{\pi}{2}$ . En chacun de ses nombres,  $f$  est un infiniment grand. L'image par  $f$  de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas  $\frac{\pi}{2}$  pour borne est donc  $]-\infty, +\infty[$  et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles. Ceci porte le total à  $6 + 2 = 8$  solutions.

En  $\frac{\pi^-}{2}$ ,  $\tan x$  et  $\tan(3x)$  tendent vers  $+\infty$  tandis que  $\tan(2x)$  et  $\tan(4x)$  tendent vers 0.  $f$  tend donc vers  $+\infty$  en  $\frac{\pi^-}{2}$ , et de même  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $\frac{\pi^+}{2}$ . L'image par  $f$  de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois  $]-\infty, +\infty[$  et finalement,

L'équation (E) admet exactement dix solutions dans  $[0, \pi]$ .

### Exercice n° 12

1)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$  et une primitive de  $x \mapsto \cos^2 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$ .

2) D'après les formules d'EULER



$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \sin(4x) + 2 \sin(2x) + 3x \right)$ .

3) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de  $x \mapsto \sin^4 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \sin(4x) - 2 \sin(2x) + 3x \right)$ .

4)  $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$  et une primitive de  $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \sin(4x) \right)$ .

5) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de  $x \mapsto \sin^6 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{32} \left( -\frac{1}{6} \sin(6x) + \frac{3}{2} \sin(4x) - \frac{15}{2} \sin(2x) + 10x \right)$ .

6)  $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$  et une primitive de  $x \mapsto \cos x \sin^6 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{7} \sin^7 x$ .

7)  $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2 \sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$  et une primitive de  $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x$ .

8)  $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$  et une primitive de  $x \mapsto \cos^3 x$  est  $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$ .

### Exercice n° 13

1) Pour  $x$  réel, on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix} - 2e^{8ix} - 3e^{6ix} + 8e^{4ix} + 2e^{2ix} - 12 + 2e^{-2ix} + 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} - 2e^{-8ix} + e^{-10ix}) \\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6).\end{aligned}$$

(**Remarque.** La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de  $e^{-2ix}$ ,  $e^{-4ix}$ , ... étaient les mêmes que ceux de  $e^{2ix}$ ,  $e^{4ix}$ , ...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512} \left( \left[ \frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 8x}{4} - \frac{\sin 6x}{2} + 2 \sin 4x + \sin 2x \right]_{\pi/6}^{\pi/3} - 6 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left( -\frac{1}{4}\sqrt{3} + 2(-\sqrt{3}) - \pi \right) = \frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2) Pour  $x$  réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \\ &= \cos^4 x \sin x - 3 \cos^6 x \sin x + 3 \cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[ -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3 \cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{32} (1 - 9\sqrt{3}) + \frac{3}{7} \times \frac{1}{128} (1 - 27\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{512} (1 - 81\sqrt{3}) + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2048} (1 - 243\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} (-14784(1 - 9\sqrt{3}) + 7920(1 - 27\sqrt{3}) - 1540(1 - 81\sqrt{3}) + 105(1 - 243\sqrt{3})) \\ &= \frac{1}{365\,440} (-8284 + 18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

### Exercice n° 14

1)  $\tan \frac{x}{2}$  existe si et seulement si  $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$  et  $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$  existe si et seulement si  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ . Pour  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ ,

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{x}{2} \right) \cos \left( \frac{x}{2} \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

2) Pour tout réel  $x$ ,

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0,$$

ou, bien mieux,

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{i(x - \frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x + \frac{2\pi}{3})} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{ix} (j^2 + 1 + j) \right) = 0.$$

3)  $\tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ ,  $\tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right)$  et  $\frac{2}{\cos(2x)}$  existent si et seulement si  $\frac{\pi}{4} - x$ ,  $\frac{\pi}{4} + x$  et  $2x$  ne sont pas dans  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , ce qui équivaut à  $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ . Donc, pour  $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned}\tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + \tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(2x)} = \frac{2}{\cos(2x)}.\end{aligned}$$

4) Pour  $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ ,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

### Exercice n° 15

1) Pour tout réel  $x$ ,  $1 - 2k \cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$ . De plus,

$$1 - 2k \cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2k \cos x + k^2 > 0.$$

$f_k$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  en vertu de théorèmes généraux, impaire et  $2\pi$ -périodique. On l'étudie dorénavant sur  $[0, \pi]$ . Pour  $x \in [0, \pi]$ , on a :

$$\begin{aligned}
f'_k(x) &= \cos x(1 - 2k \cos x + k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \sin x(2k \sin x)(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(\cos x(1 - 2k \cos x + k^2) - k \sin^2 x) \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(-k \cos^2 x + (1 + k^2) \cos x - k) \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1)(k - \cos x)
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) = \frac{(k \cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k \cos x + k^2)^{3/2}}.$$

**1er cas :**  $|k| < 1$  et  $k \neq 0$  ( $f_0(x) = \sin x$ ). Pour tout réel  $x$ ,  $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1) < 0$  (car  $|k \cos x| < 1$ ) et  $f'_k(x)$  est du signe de  $\cos x - k$ .

x	0	Arccos k	$\pi$
f'(x)	+	0	-
f	0	1	0

car  $f_k(\text{Arccos } k) = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - 2k^2 + k^2}} = 1$ .

**2ème cas :**  $k > 1$ . Pour tout réel  $x$ ,  $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) > 0$  et  $f'_k(x)$  est du signe de  $k \cos x - 1$ .

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	$\pi$
f'(x)	+	0	-
f	0	$\frac{1}{k}$	0

car  $f_k\left(\text{Arccos } \frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1 - 2 + \frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{k}$ .

**3ème cas :**  $k < -1$ . Pour tout réel  $x$ ,  $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) < 0$  et  $f'_k(x)$  est du signe de  $1 - k \cos x$ .

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	$\pi$
f'(x)	+	0	-
f	0	$-\frac{1}{k}$	0

car  $f_k\left(\text{Arccos } \frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1 - 2 + \frac{1}{k^2}}} = -\frac{1}{k}$ .

**2)** Pour  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , posons  $I_k = \int_0^\pi f_k(x) dx$ .

Si  $k = 0$ ,  $I_k = \int_0^\pi \sin x dx = 2$ . Sinon,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{2k \sin x}{2\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}} dx = \frac{1}{k} \left[ \sqrt{1 - 2k \cos x + k^2} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k} (\sqrt{1 + 2k + k^2} - \sqrt{1 - 2k + k^2}) = \frac{1}{k} (|k + 1| - |k - 1|).
\end{aligned}$$

Plus précisément, si  $k \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,  $I_k = \frac{1}{k}((1+k) - (1-k)) = 2$ , ce qui reste vrai pour  $k = 0$ . Si  $k > 1$ ,  $I_k = \frac{1}{k}((1+k) - (k-1)) = \frac{2}{k}$ , et enfin, si  $k < -1$ ,  $I_k = \frac{-2}{k}$ . En résumé,

$$\text{Si } k \in ]-1, 1[, I_k = 2 \text{ et si } k \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, I_k = \frac{2}{|k|}.$$

### Exercice n° 16

1) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k.$$

Maintenant,  $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Donc,

**1er cas.** Si  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ , on a immédiatement  $S_n = n + 1$  et  $S'_n = 0$ .

**2ème cas.** Si  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , alors  $e^{ix} \neq 1$  et

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos \left( \frac{nx}{2} \right) \sin \left( \frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \begin{cases} \frac{\left( \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \left( \frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \left( \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) x \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \sin \left( \left( k + 1 \right) - \frac{1}{2} \right) x \right) - \sum_{k=0}^n \sin \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left( \frac{-x}{2} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2} \end{aligned}$$

et donc, si  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \dots$

2) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$ . On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

D'après 1), si  $x \in \pi\mathbb{Z}$ , on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) = 0,$$

et si  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ ,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2} \left( n+1 + \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2} \left( n+1 - \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right).$$

3) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la formule du binôme de NEWTON

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \right) + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k} \\ &= (1 + e^{ix})^n = \left( e^{ix/2} + e^{-ix/2} \right)^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left( \cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}.$$

### Exercice n° 17

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \\ &\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow \left| e^{ia/2} e^{ib/2} \left( e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2} \right) \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \cos \frac{a-b}{2} \right| = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left( \frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left( -\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow a-b \in \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left( -\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / b = a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Par suite, nécessairement,  $e^{ib} = je^{ia}$  ou  $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ . Réciproquement, si  $e^{ib} = je^{ia}$  ou encore  $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si  $e^{ib} = j^2 e^{ia}$  ou encore  $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( a, a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \right), a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

### Exercice n° 18

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} &= 2 \left( \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \left( \cos^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 \left( \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

### Exercice n° 19

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right). \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10} \right\}.$$

2)  $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 3 - 2 \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (-4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0). \end{aligned}$$

D'après 1), l'équation  $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$  admet entre autres pour solutions  $\frac{\pi}{10}$  et  $\frac{13\pi}{10}$  (car, dans chacun des deux cas,  $\cos x \neq 0$ ), ou encore, l'équation  $4X^2 + 2X - 1 = 0$  admet pour solutions les deux nombres **distincts**  $X_1 = \sin \frac{\pi}{10}$  et  $X_2 = \sin \frac{13\pi}{10}$ , qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque  $X_1 > 0$  et que  $X_2 < 0$ , on obtient

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque  $\sin \frac{13\pi}{10} = -\sin \frac{3\pi}{10}$ ),

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ensuite,  $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{5}$ , et donc

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Enfin,  $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$  et de même  $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos \frac{3\pi}{10}$ .

### Exercice n° 20

1) La fonction  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et paire. On l'étudie sur  $[0, \pi]$ .

La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  et pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$

$$f_1'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)(1 + 2\cos(x)).$$

La fonction sinus s'annule en 0 et  $\pi$  et est strictement positive sur  $]0, \pi[$ . Donc la fonction  $f_1'$  est du signe de  $-1 - 2\cos(x)$  sur  $]0, \pi[$ . Ensuite, pour  $x \in ]0, \pi[$ ,

$$-1 - 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3},$$

et

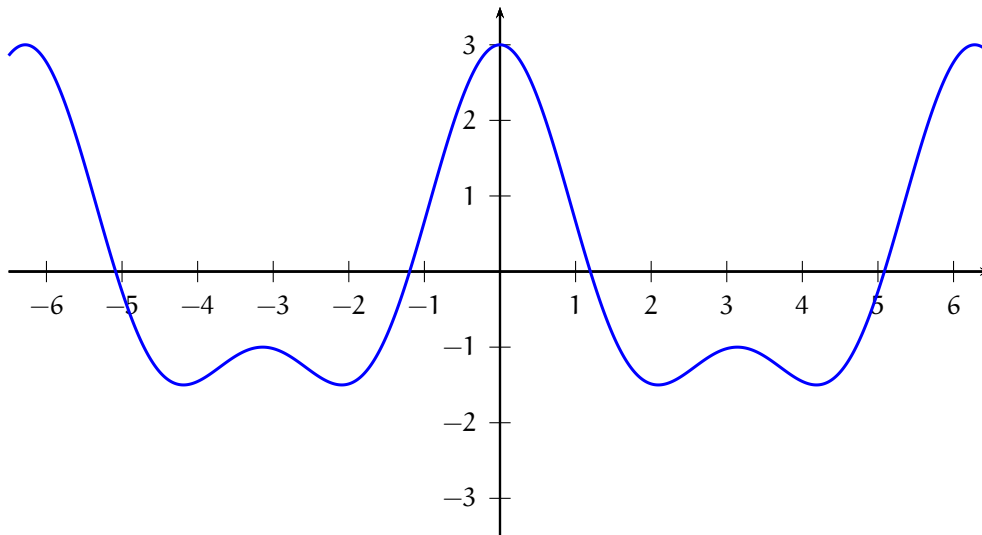
$$-1 - 2\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

Ainsi, la fonction  $f_1'$  est strictement négative sur  $]0, \frac{2\pi}{3}[$ , strictement positive sur  $]\frac{2\pi}{3}, \pi[$  et s'annule en  $0, \frac{2\pi}{3}$  et  $\pi$ .

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f_1$  :

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$		
$f_1'(x)$	0	-	0	+	0
$f_1$	3		$-\frac{3}{2}$		-1

Graphes de  $f_1$ .



2) Pour tout réel  $x$ ,  $2 - \cos(x) \neq 0$  et donc, la fonction  $f_2$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire. On l'étudie sur  $[0, \pi]$ .

La fonction  $f_2$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  et pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$

$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}.$$

La fonction  $f_2'$  est du signe de  $2\cos(x) - 1$  sur  $[0, \pi]$ . Ensuite, pour  $x \in [0, \pi]$ ,

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

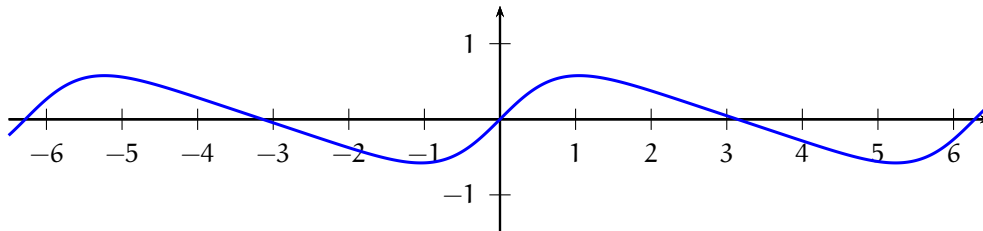
Ainsi, la fonction  $f_2'$  est strictement positive sur  $[0, \frac{\pi}{3}[$ , strictement négative sur  $]\frac{\pi}{3}, \pi]$  et s'annule en  $\frac{\pi}{3}$ . On note que

$$f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\dots$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f_2$  :

$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Graphes de  $f_2$ .



3)  $f_3$  est définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ , paire et  $2\pi$ -périodique.  $f_3$  est continue sur  $D$  en vertu de théorèmes généraux. On étudie  $f_3$  sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Si  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f_3(x) = \tan x + \cos x$  et si  $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $f_3(x) = -\tan x + \cos x$ .

**Etude en  $\frac{\pi}{2}$ .**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x| = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty$ . La courbe représentative de la fonction  $f_3$  admet la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$  pour droite asymptote.

**Dérivabilité et dérivée.**  $f_3$  est dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  en vertu de théorèmes généraux et pour  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \text{ et pour } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right], f_3'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x.$$

$f_3$  est dérivable à droite en 0 et  $(f_3)'_d(0) = 1$ . Par symétrie,  $f_3$  est dérivable à gauche en 0 et  $(f_3)'_g(0) = -1$ .  $f_3$  n'est pas dérivable en 0.

De même,  $f_2$  est dérivable à gauche et à droite en  $\pi$  avec  $(f_3)'_g(\pi) = -1$  et  $(f_3)'_d(\pi) = 1$ , et n'est donc pas dérivable en  $\pi$ .

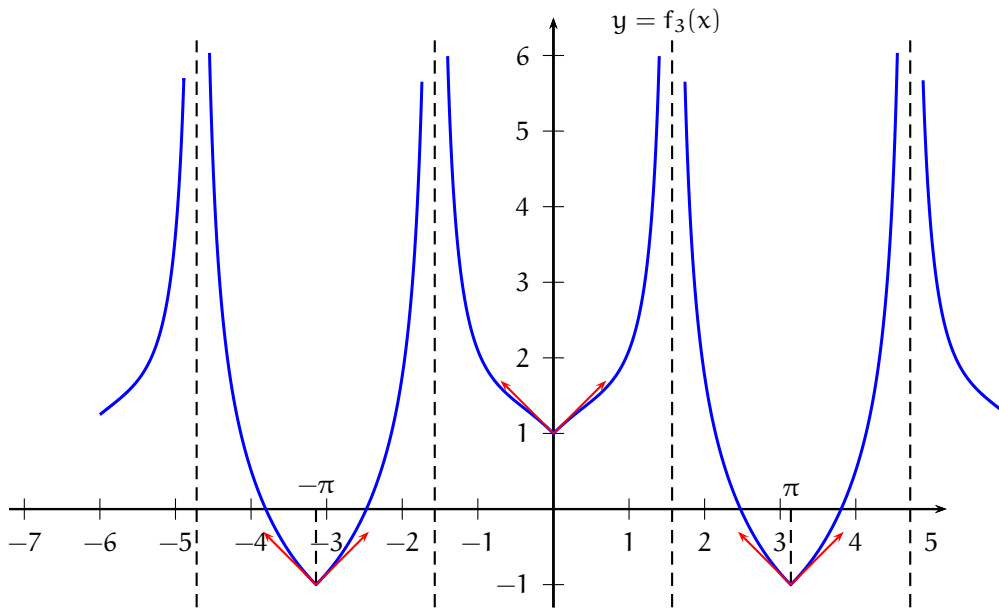
**Variations.**  $f_3$  est strictement décroissante sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Puis, pour  $x$  élément de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0.$$

La fonction  $f_3'$  est strictement positive sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et donc  $f_3$  est strictement croissante sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Graphes.





4) La fonction  $f_4$  est  $2\pi$ -périodique. On l'étudie sur  $[-\pi, \pi]$ . Pour  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$2 \cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Pour  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f_4(x)$  existe si et seulement si  $x \neq -\frac{2\pi}{3}$  et  $x \neq \frac{2\pi}{3}$ . On étudie la fonction  $f_4$  sur  $D = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[ \cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[ \cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ .

**Etude en  $\frac{2\pi}{3}$ .** Quand  $x$  tend vers  $\frac{2\pi}{3}$  par valeurs inférieures,  $2 \cos(x) + 1$  tend vers 0 par valeurs supérieures et quand  $x$  tend vers  $\frac{2\pi}{3}$  par valeurs supérieures,  $2 \cos(x) + 1$  tend vers 0 par valeurs inférieures. D'autre part, quand  $x$  tend vers  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $2 \sin(x) + 1$  tend vers  $\sqrt{3} + 1$  qui est strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

**Etude en  $-\frac{2\pi}{3}$ .** Quand  $x$  tend vers  $-\frac{2\pi}{3}$  par valeurs inférieures,  $2 \cos(x) + 1$  tend vers 0 par valeurs inférieures et quand  $x$  tend vers  $-\frac{2\pi}{3}$  par valeurs supérieures,  $2 \cos(x) + 1$  tend vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, quand  $x$  tend vers  $-\frac{2\pi}{3}$ ,  $2 \sin(x) + 1$  tend vers  $-\sqrt{3} + 1$  qui est strictement négatif. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

**Dérivée.** La fonction  $f_4$  est dérivable sur  $D$  et pour tout  $x$  de  $D$ ,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(2 \cos(x))(2 \cos(x) + 1) - (2 \sin(x) + 1)(-2 \sin(x))}{(2 \cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2 \cos(x) + 2 \sin(x)}{(2 \cos(x) + 1)^2} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \right)}{(2 \cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{(2 \cos(x) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout  $x$  de  $D$ ,  $4 + 2\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 4 - 2\sqrt{2} > 0$  et donc la fonction  $f_4'$  est strictement positive sur  $D$ . La fonction  $f_4$  est donc strictement croissante sur  $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$  et sur  $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$  et sur  $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$  (mais pas sur  $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[ \cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[ \cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ ).

Graphe.

