



**Exercice01** : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans  $\mathbb{Z}$  tous les diviseurs de -8

**Exercice02** :

1)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$  et  $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si  $\frac{a}{2b+c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

b) montrer que si  $\frac{a}{2b+3c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

c) montrer que si  $\frac{a}{x-y}$  et  $\frac{a}{b-c}$  alors  $\frac{a}{xb-cy}$

2)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

Montrer que  $\frac{a}{19}$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

Montrer que  $\frac{d}{13}$

**Exercice03** :  $a \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que :  $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{29} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

**Exercice04** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

3 divise  $4^n - 1$

**Exercice05** : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n+2/3n+1$

**Exercice 06** : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Exercice07** : Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x > y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Exercice08** : Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants :  $23451^{100}$  ;  $100^{23451}$  ;  $23451^{100} + 100^{23451}$

**Exercice09** : 1) Montrer que :  $5^8 \equiv -1 [17]$

2) Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants :  $5^{16}$  ;  $5^{500}$ .

**Exercice10** :  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$  Si 17 est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 19 Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de  $b$  par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1)  $a+b$       2)  $a^2+b^2$       3)  $2a-5b$

**Exercice11** : Déterminer le reste de la division

du nombres  $3^{2007}$  par 2 et par 13

**Exercice12** : Déterminer le reste de la division du nombres  $73^{2019}$  par 7

**Exercice13** : Déterminer le reste de la division du nombres  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Exercice14** : Déterminer le reste de la division par 5 du nombres  $22^{33} + 33^{22}$

**Exercice15**: Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  3 divise  $4^n - 1$

**Exercice16** : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 7 du nombres  $3^n$

2) en déduire le reste de la division par 7 du nombres  $2019^{2019}$

**Exercice17**: Résoudre les équations

suitantes dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  : 1)  $\bar{2}x = \bar{3}$  2)  $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

**Exercice18** : Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  l'équations

suitants :  $x + \bar{3}y = \bar{1}$

**Exercice19** : Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  les système

suitants :  $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

**Exercice20** : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 10 du nombres  $3^n$

2) en déduire le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$  tel que :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0 [10]$

**Exercice21** : Déterminer le chiffre des unités du nombres  $24537^{2018}$

**Exercice22** : Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tel que :  $2^n \equiv n^2 [9]$

**Exercice23** : Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équations suivante :  $3^n + 5n + 1 \equiv 0 [8]$

**Exercice24** : Quel est le reste de la division du nombre  $22^{33} \times 33^{22}$  par 5?

**Exercice25** : Quel est le reste de la division du nombre  $3^{2019}$  par 2 et par 13?

**Exercice26** : 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $2^{2n} + 6n - 1$  Est divisible par 9

2) En déduire que :  $4^n \equiv 3n + 1 [9]$

**Exercice27 :** Quel est le reste de la division du nombre  $1653^{351} + 43^{137}$  par 11?

**Exercice28:**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice29 :**montrer que

$$\frac{7}{1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}}$$

**Exercice30 :**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 4$  et  $n^2 - 3n + 4$

Sont des nombres pairs

2) En déduire que  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$  n'est pas

Premier

**Exercice31 :** montrer que  $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

**Exercice32 :**  $n \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombres :  $A = n^2 + 3$  et  $B = n + 2$

1) montrer que  $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

**Exercice33:**  $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$  et  $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les  $a \vee b \quad (n \in \mathbb{N})$

**Exercice34 :** Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations

suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x \succ y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Exercice35 :** Quelles sont les valeurs de l'entier

relatif  $n$  pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$

**Exercice 36 :** Quelles sont les valeurs de l'entier

relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Exercice37 :**déterminer :  $d = (-8316) \wedge 1080$

et  $m = 8316 \vee 1080$

**Exercice38 :** si  $2 = a \wedge b$  et  $-12 = a \times b$

déterminer :  $a \vee b$

**Exercice 39:**  $n$  et  $a$  et  $b$  des entiers naturels

Démontrer que si  $q$  est le quotient de la division

euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $q'$  est le quotient de  $q$

par  $b$  Alors  $q'$  est aussi le quotient de  $n$  par  $ab$

**Exercice 40:** Déterminer le reste de la division

euclidienne de  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Exercice41 :** 1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$$

2) montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^{2n+2} \equiv 1[15]$

**Exercice42:**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice43 :** Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation:

$$x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$$

**Exercice 44:**  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que :  $a = bc + d$

1) montrer que  $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que :  $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

**Exercice45 :**  $a \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombres :  $A = 35a + 57$  et  $B = 45a + 76$

montrer que  $A \wedge B = 1$  ou  $A \wedge B = 19$

**Exercice46 :**  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{N}^*$  On considère les

deux nombres :  $a = 9x + 4y$  et  $b = 2x + y$

1)montrer que  $x \wedge y = a \wedge b$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a)montrer que  $a \wedge b = b \wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles  $a \wedge b = d$

c)montrer que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d)en déduire les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a \wedge b = 1$$

**Exercice 47:**  $n \in \mathbb{Z}$  on pose :  $d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$

1) montrer que  $d_n \in \mathbb{Z}$

2)déterminer les entiers relatifs  $n$

tel que  $d_n = 6$

**Exercice 48:**  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \geq 3$

et  $a$  est impair et on pose :  $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a)montrer que  $2^{ab} \equiv 1[d]$

b)montrer que  $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que :  $d \in \{1; 2\}$

3)montrer que  $d = 1$

**Exercice49 :** montrer que :  $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice 50 :** déterminer le nombre entier naturel

$n$  Tel que le quotient de la division euclidienne

de  $n$  par 25 est  $p$  et le reste est  $p^2$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

**Exercice51:**  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{Z}$

si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de

$a - 1$  par  $b$  déterminer le quotient de la division

euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

**Exercice52 :** 1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2} (n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) montrer que:  $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

**Exercice53 :**

1)a)en déduire que :  $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \quad \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 5 du nombre  $2^n$

2) montrer que  $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que  $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

**Exercice54** : déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1)  $2019^{2020^{2021}}$  2)  $1987^{1991^{1983}}$

**Exercice55** : soit  $N = \overline{dcba}$  un entier naturel montrer que :  $N \equiv a - b + c - d [11]$

**Exercice56** :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :  $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs  $u$  et  $v$  tel que :  $39u + 67v = 1$

**Exercices pour le 2bac SM**

**Exercice57** : montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

**Exercice58** : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2 [11] \\ n \equiv 3 [7] \end{cases}$$

**Exercice59** : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante : (E)  $7(x-2) = 3(y+1)$

**Exercice60** : déterminer l'entier naturel  $n$  tel

que :  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

**Exercice61** : déterminer dans  $\mathbb{N}^2$  les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

**Exercice62**: résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système

suisant:  $\begin{cases} 2x \equiv 3 [7] \\ 3x \equiv 1 [5] \end{cases}$

**Exercice63**: 1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$  et  $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

**Exercice64** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

**Exercice65** : en utilisant Fermat Montrer que :

1)  $3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1 [11]$

2)  $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0 [17]$

**Exercice66** : écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

**Exercice67** : déterminer les entiers naturels  $x$  et  $y$  tel que :  $\overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)}$

**Exercice68 :1)** résoudre dans  $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$

$$\overline{2x^3 + x + 3} = \overline{0}$$

2) déterminer les entiers naturels  $n$  tels que : 7 divise  $\overline{2013}_{(n)}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs  
et exercices

Que l'on devient un mathématicien





## Exercices avec solutions

**Exercice01** : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans  $\mathbb{Z}$  tous les diviseurs de -8

**Solution01** : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2)  $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

**Exercice02** :

1)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$  et  $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si  $\frac{a}{2b+c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

b) montrer que si  $\frac{a}{2b+3c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

c) montrer que si  $\frac{a}{x-y}$  et  $\frac{a}{b-c}$  alors  $\frac{a}{xb-cy}$

2)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

Montrer que  $\frac{a}{19}$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

Montrer que  $\frac{d}{13}$

**Solution02** : 1) a)

$$\begin{cases} \frac{a}{2b+c} \\ \frac{a}{b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2(b+c) - (2b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c}$$

$$1) b) \begin{cases} \frac{a}{2b+3c} \\ \frac{a}{b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2b+3c - 2(b+c)} \Rightarrow \frac{a}{c}$$

$$1) c) \begin{cases} \frac{a}{x-y} \\ \frac{a}{b-c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{bx-by} \text{ et } \frac{a}{by-cy} \Rightarrow \frac{a}{bx-cy}$$

2)  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

$$\Rightarrow \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-12n+18} \Rightarrow \frac{a}{19}$$

$$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{d}{4n^2+12} \text{ et } \frac{d}{4n^2-4n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{11+4n} \text{ et } \frac{d}{-2+4n} \Rightarrow \frac{d}{13}$$

**Exercice03** :  $a \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} \frac{a}{5x-7} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{29}$$

$$\text{Solution03 : } \begin{cases} \frac{a}{5x-7} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2(5x-7) - 5(2x+3)}$$

$$\frac{a}{10x-14-10x-15} \Rightarrow \frac{a}{-29} \Rightarrow \frac{a}{29}$$

**Exercice04** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

3 divise  $4^n - 1$

**Solution04** :

Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$4^0 - 1 = 0$  est un multiple de 3

Donc P(0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit

vraie c'est-à-dire :  $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$  donc

$$4^n = 3k + 1$$

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$$

$$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$

$$\text{avec } k' = 4k + 1$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$  est divisible par 9

**Exercice05** : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$

**Solution05** :  $n + 2/3n + 1$  et  $n + 2/3n + 2$

$n + 2/3n + 1$  et  $n + 2/3n + 6$  donc

$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1)$  donc  $n + 2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que  $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$  ce qui entraîne que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que que que si  $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$  alors

$n + 2/3n + 1$  avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$  sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

**Exercice 06 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Solution06 :** Cette fraction a un sens si :  $n+4 \neq 0$ , soit  $n \neq -4$

On constate que  $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$  divise  $3(n+4)$ , donc  $n+4$  divise  $3n+8$  si

$n+4$  divise  $-4$ .

Les diviseurs de  $-4$  sont  $1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4$ .

Il faut que  $n+4 \in \{-4; -2; -1; 2; 4\}$  ce qui entraîne

que  $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que  $-4$  n'appartient pas à  $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$  avant de conclure.

Conclusion : la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$  représente un entier

relatif pour les valeurs de l'entier relatif  $n$  :  $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$ .

**Exercice07 :** Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations

suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x > y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Solution07 :** a)  $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$  et  $x+y$  sont des diviseurs positif de 32

Et  $(x-y) + (x+y) = 2x$  est un nombre pair

Donc  $x-y$  et  $x+y$  ont la même parité  $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
$x$	9	6
$y$	7	2

$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$

b)  $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x+1 = 99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc :  $2x+1$  et  $y+1$  sont des diviseurs positif de 100

$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
$x$	0			2		12		
$y$	99			10		3		

$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$

**Exercice08 :** Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants :  $23451^{100}$  ;  $100^{23451}$  ;  $23451^{100} + 100^{23451}$

**Solution08 :** On a :  $23451 = 3908 \times 9 + 6$

donc :  $23451 \equiv 6[9]$

donc :  $23451 \equiv 6^{100}[9]$

et on a :  $6 = 6[9]$  donc  $6^2 = 36[9] \Leftrightarrow 6^2 \equiv 0[9]$

donc :  $(6^2)^{50} \equiv 0[9]$  donc :  $6^{100} \equiv 0[9]$

donc :  $23451^{100} \equiv 0[9]$  **(1)**

donc le reste dans la division du nombre  $23451^{100}$  par 9 est : 0 (cad  $23451^{100}$  est divisible par 9 ou on dit que 9 divise  $23451^{100}$ )

de même on a :  $100 = 11 \times 9 + 1$  donc :  $100 \equiv 1[9]$

$\Rightarrow 100^{23451} \equiv 1^{23451}[9] \Rightarrow 100^{23451} \equiv 1[9]$  **(2)**

De **(1)** et **(2)** on déduit que :

$23451^{100} + 100^{23451} \equiv 0 + 1[9]$  car la congruence est compatible avec l'addition

Donc :  $23451^{100} + 100^{23451} \equiv 1[9]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $23451^{100} + 100^{23451}$  par 9 est : 1

**Exercice09 :** 1) Montrer que :  $5^8 \equiv -1[17]$

2) Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants :  $5^{16}$  ;  $5^{500}$ .

**Solution09 :** 1) On a :  $5^1 \equiv 5[17]$  donc

$5^2 \equiv 25[17] \Leftrightarrow 5^2 \equiv 8[17]$

$5^4 \equiv 8^2[17] \Leftrightarrow 5^4 \equiv 13[17]$

$5^8 \equiv 13^2[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 169[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv 16[17] \Leftrightarrow 5^8 \equiv -1[17]$

2) On a :  $5^8 \equiv -1[17]$  donc

$(5^8)^2 \equiv (-1)^2[17] \Leftrightarrow 5^{16} \equiv 1[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $5^{16}$  par 17 est : 1

On a :  $500 = 31 \times 16 + 4$

Donc :  $5^{500} \equiv 5^{31 \times 16 + 4}[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv (5^{16})^{31} \times 5^4[17]$

$\Leftrightarrow 5^{500} \equiv 1^{31} \times 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 5^4[17] \Leftrightarrow 5^{500} \equiv 13[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $5^{500}$  par 17 est : 13

**Exercice10 :**  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$  Si 17 est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de  $b$  par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1)  $a+b$  2)  $a^2 + b^2$  3)  $2a - 5b$

**Solution10 :** 1) On a :  $a \equiv 17[19]$  et  $b \equiv 15[19]$

donc :  $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $a+b$  par 19 est : 13

2)  $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

$$\text{Donc : } a^2 + b^2 \equiv 4 + 16[19] \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 1[19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $a^2 + b^2$  Par 19 est : 1

$$3) a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19] \text{ (1)}$$

$$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$$

$$\text{Donc : } 5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19] \text{ (2)}$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$2a - 5b \equiv 15 + 1[19] \Rightarrow 2a - 5b \equiv 16[19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $2a - 5b$  Par 19 est : 16

**Exercice11** : Déterminer le reste de la division du nombre  $3^{2007}$  par 2 et par 13

$$\text{Solution11 : 1) On a : } 3 \equiv 1[2] \text{ donc } 3^{2007} \equiv 1[2]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $3^{2007}$  Par 2 est : 1

$$2) \text{ On a : } 3 \equiv 3[13] \text{ donc}$$

$$3^2 \equiv 9[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 27[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 1[13]$$

Et on a :  $2007 = 3 \times 669$  donc :

$$(3^3)^{669} \equiv 1^{669}[13] \Rightarrow 3^{2007} \equiv 1[13]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $3^{2007}$  Par 13 est : 1

**Exercice12** : Déterminer le reste de la division du nombre  $73^{2019}$  par 7

$$\text{Solution12 : On a : } 73 \equiv 3[7] \text{ donc } 73^{2019} \equiv 3^{2019}[7]$$

$$3^{2019} = 3^{2018+1} = 3^{2 \times 1009 + 1} = (3^2)^{1009} \times 3^1$$

$$\text{On a : } 3^2 \equiv 2[7] \text{ donc : } (3^2)^{1009} \equiv 2^{1009}[7]$$

$$\text{donc : } 3^{2019} \equiv 2^{1009} \times 3[7]$$

$$\text{on a : } 1009 = 336 \times 3 + 1$$

$$\text{donc : } 2^{2019} = (2^3)^{336} \times 2 \text{ et on a : } 2^3 \equiv 1[7]$$

$$\text{donc : } (2^3)^{336} \times 2 \equiv 2[7] \text{ par suite : } 73^{2019} \equiv 6[7]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $73^{2019}$  Par 7 est : 6

**Exercice13** : Déterminer le reste de la division du nombre  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

$$\text{Solution13 : On a : } 19 \equiv 5[7] \text{ donc } 19^2 \equiv 4[7]$$

$$\text{donc } 19^4 \equiv 2[7] \text{ et on a } 52 = 13 \times 4 \text{ donc :}$$

$$19^{52} \equiv 2^{13}[7]$$

$$\text{On a : } 23 \equiv 2[7] \text{ donc } 23^{41} \equiv 2^{41}[7]$$

$$19^{52} \times 23^{41} \equiv 2^{54}[7] \text{ ( } 54 = 3 \times 18 \text{ )}$$

$$\text{On a : } 2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{54} \equiv 1[7]$$

$$\text{donc : } 19^{52} \times 23^{41} \equiv 1[7]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $19^{52} \times 23^{41}$  Par 7 est : 1

**Exercice14** : Déterminer le reste de la division par 5 du nombre  $22^{33} + 33^{22}$

$$\text{Solution14 : On a : } 22 \equiv 2[5] \text{ donc } 22^{33} \equiv 2^{33}[5]$$

$$\text{Et on a : } 33 \equiv -2[5] \text{ donc } 33^{22} \equiv 2^{22}[5]$$

$$\text{donc } 22^{33} + 33^{22} \equiv 2^{33} + 2^{22}[5]$$

$$\text{et on a } 2^4 \equiv 1[5] \text{ et } 33 = 8 \times 4 + 1 \text{ donc :}$$

$$2^{33} = 2^{8 \times 4 + 1} = (2^4)^8 \times 2^1 \text{ donc } 2^{33} \equiv 2[5]$$

$$\text{on a } 2^{22} = (2^2)^{11} \text{ et } 2^2 \equiv -1[5] \text{ donc } 2^{22} \equiv -1[5]$$

$$\text{donc } 22^{33} + 33^{22} \equiv 2 - 1[5]$$

$$\text{donc : } 22^{33} + 33^{22} \equiv 1[5]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $22^{33} + 33^{22}$  Par 5 est : 1

**Exercice15**: Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3$  divise  $4^n - 1$   
**Solution15** : Méthode1

$$\text{Montrons que : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons  $4^0 - 1 = 0$  est un multiple de 3

Donc P(0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :  $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$  donc  $4^n = 3k + 1$

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \text{ ??}$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$$

$$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$

$$\text{avec } k' = 4k + 1$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :  $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$  est divisible par 3

Méthode2

Il suffit de montrer que :  $4^n - 1 \equiv 0[3] \text{ ??}$

$$\text{On a : } 4 \equiv 1[3] \text{ donc } 4^n \equiv 1[3]$$

$$\text{Donc : } 4^n - 1 \equiv 0[3] \quad \text{Cqfd}$$

**Exercice16** : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 7 du nombre  $3^n$

2) en déduire le reste de la division par 7 du nombre  $2019^{2019}$

$$\text{Solution19 : 1) } 3^n \equiv r[7] \text{ et } r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

On a :  $3^0 \equiv 1[7]$  et  $3^1 \equiv 3[7]$  et  $3^2 \equiv 2[7]$   
 et  $3^3 \equiv 6[7]$  et  $3^4 \equiv 4[7]$  et  $3^5 \equiv 5[7]$  et  $3^6 \equiv 1[7]$   
 Si  $n \in \mathbb{N}$  alors :  $n = 6k + r$  avec  $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

On a :  $3^6 \equiv 1[7]$  donc :  $(3^6)^k \equiv 1^k [7]$   
 donc :  $3^{6k} \equiv 1[7]$  et  $3^{6k+1} \equiv 3[7]$  et  $3^{6k+2} \equiv 2[7]$   
 et  $3^{6k+3} \equiv 6[7]$  et  $3^{6k+4} \equiv 4[7]$  et  $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

**Exercice17:** Résoudre les équations  
 suivantes dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  : 1)  $\bar{2}x = \bar{3}$  2)  $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$   
 3)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

**Solution10 :** On a :  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que  
 Cette équation n'admet pas de solutions Donc :  $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$x^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :  
 $\bar{0}$  et  $\bar{1}$  sont solutions de l'équation Donc :  $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$   
 Car :  $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$x^3$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si  $\bar{k} = \bar{0}$  :  $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$  Si  $\bar{k} = \bar{1}$  :  $S = \{\bar{3}\}$

Si  $\bar{k} = \bar{2}$  :  $S = \emptyset$  Si  $\bar{k} = \bar{3}$  :  $S = \{\bar{1}\}$

**Exercice18 :** Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  l'équations

suyants :  $x + \bar{3}y = \bar{1}$

**Solution18 :** on Dresse une table des opérations  
 de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$  Comme suite

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

**Exercice19 :** Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  les système

$$\text{suyants : } \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

**Solution19 :**

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

**Exercice20 :** 1) Déterminer et discuter suivants  
 les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la  
 division par 10 du nombres  $3^n$

2) en déduire le chiffre des unités du nombres  
 $2019^{2020}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$   
 tél que :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

**Solution20 :** 1)  $3^n \equiv r[10]$  et  $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

On a :  $3^0 \equiv 1[10]$  et  $3^1 \equiv 3[10]$  et  $3^2 \equiv 9[10]$

et  $3^3 \equiv 7[10]$  et  $3^4 \equiv 1[10]$

Si  $n \in \mathbb{N}$  alors :  $n = 4k + r$  avec  $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

On a :  $3^4 \equiv 1[10]$  donc :  $(3^4)^k \equiv 1^k [10]$

donc :  $3^{4k} \equiv 1[10]$  et  $3^{4k+1} \equiv 3[10]$  et  $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et  $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$  est  
 le reste dans la division du nombre  $2019^{2020}$  Par  
 10

cad : on cherche  $r$  tel que :  $2019^{2020} \equiv r[10] ??$

On a :  $2019 = 2010 + 9$  donc :  $2019 \equiv 9[10]$

donc :  $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or :  $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc :  $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$  est 1  
 Autre méthode :  $2019 \equiv 9[10]$

donc :  $2019 \equiv -1[10]$  donc :  $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

$n$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$

**Exercice21** : Déterminer le chiffre des unités du nombre  $24537^{2018}$

**Solution21** : On a :  $24537 \equiv 7[10]$  donc :

$24537^{2018} \equiv 7^{2018}[10]$  or :  $7^2 \equiv -1[10]$  donc :

$$(7^2)^{1009} \equiv (-1)^{1009}[10] \equiv -1[10]$$

Donc :  $24537^{2018} \equiv -1[10]$  donc :  $24537^{2018} \equiv 9[10]$

Donc : des unités du nombre  $24537^{2018}$  est 9

**Exercice22** : Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tel que :  $2^n \equiv n^2[9]$

**Solution22** : on Dresse une table des opérations

de  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}; \bar{8}\}$  Comme suite

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$2^n$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{n}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$$2^n \equiv n^2[9] \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{2} \text{ ou } \bar{n} = \bar{4}$$

$$2^n \equiv n^2[9] \Leftrightarrow n = 2 + 9k \text{ ou } n = 4 + 9k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

**Exercice23** : Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation suivante :  $3^n + 5n + 1 \equiv 0[8]$

**Solution23** : methode1 :

on Dresse une table des opérations de

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$  Comme suite

On a :  $3^0 \equiv 1[8]$  et  $3^1 \equiv 3[8]$  et  $3^2 \equiv 1[8]$

donc :  $3^{2k} \equiv 1[8]$  et  $3^{2k+1} \equiv 3[8]$

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$3^n$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{5}n+1$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$U_n$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$

$$3^n + 5n + 1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{6}$$

$$3^n + 5n + 1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow n = 6 + 8k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

**Exercice24** : Quel est le reste de la division du nombre  $22^{33} \times 33^{22}$  par 5?

**Solution24** : On a :  $22 \equiv 2[5]$  donc  $22^{33} \equiv 2^{33}[5]$

Et on a :  $33 \equiv -2[5]$  donc  $33^{22} \equiv 2^{22}[5]$

donc  $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{33} \times 2^{22}[5]$  donc  $22^{33} \times 33^{22} \equiv 2^{55}[5]$

et on a  $2^4 \equiv 1[5]$  et  $55 = 13 \times 4 + 3$  donc :

$$2^{55} = 2^{13 \times 4 + 3} = (2^4)^{13} \times 2^3 \text{ donc } 2^{55} \equiv 8[5] \text{ donc}$$

$2^{55} \equiv 3[5]$  Par suite : le reste dans la division du

nombre  $22^{33} \times 33^{22}$  Par 5 est : 3

**Exercice25** : Quel est le reste de la division du

nombre  $3^{2019}$  par 2 et par 13?

**Solution25** : 1) On a :  $3 \equiv 1[2]$  donc  $3^{2019} \equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $3^{2019}$  Par 2 est : 1

2) On a :  $3 \equiv 3[13]$  donc

$$3^2 \equiv 9[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 27[13] \Rightarrow 3^3 \equiv 1[13]$$

Et on a :  $2019 = 3 \times 673$  donc :

$$(3^3)^{673} \equiv 1^{673}[13] \Rightarrow 3^{2019} \equiv 1[13]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $3^{2019}$  Par 13 est : 1

**Exercice26** : 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2^{2n} + 6n - 1$$

Est divisible par 9

2) En déduire que :  $4^n \equiv 3n + 1[9]$

**Solution26** : 1) Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k$$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=1$  nous avons

$$2^{2 \times 1} + 6 \times 1 - 1 = 9 \text{ est un multiple de 9}$$

Donc P (1) est vraie.

2 étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{N} / 2^{2n} + 6n - 1 = 9k \text{ donc } 2^{2n} = 9k - 6n + 1$$

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 2^{2(n+1)} + 6(n+1) - 1 = 9k' \text{ ??}$$

$$2^{2n+2} + 6(n+1) - 1 = 2^{2n} \times 2^2 + 6n + 6 - 1$$

$$= (9k - 6n + 1) \times 4 + 6n + 5 = 9 \times 4k - 24n + 4 + 6n + 5$$

$$= 9 \times 4k - 18n + 9 = 9 \times (4k - 2n + 1) = 9 \times k'$$

avec  $k' = 4k - 2n + 1$  donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{2n} + 6n - 1 \text{ Est divisible par 9}$$

$$2) \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{9}{2^{2n} + 6n - 1}$$

$$\text{Donc : } 2^{2n} + 6n - 1 \equiv 0[9] \text{ Donc : } (2^2)^n \equiv -6n + 1[9]$$

$$\text{et on a : } 0 \equiv 9n[9] \text{ donc : } 4^n \equiv 3n + 1[9]$$

**Exercice27** : Quel est le reste de la division du nombre  $1653^{351} + 43^{137}$  par 11?

**Solution27** : On a :  $1653 = 150 \times 11 + 3$

$$1653 \equiv 3[11] \text{ et } 43 \equiv -1[11] \text{ donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351}[11]$$

$$43^{137} \equiv (-1)^{137}[11] \text{ donc : } 43^{137} \equiv -1[11]$$

On a :  $351 = 70 \times 5 + 1$

$$\text{donc } (1653)^{351} \equiv 3^{351}[11] \equiv (3^5)^{70} \times 3[11] \equiv 1 \times 3[11] \equiv 3[11]$$

$$\text{donc } 1653^{351} + 43^{137} \equiv 2[11]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre  $1653^{351} + 43^{137}$  Par 11 est : 2

**Exercice28:**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Solution28 :**

1)  $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4^n \times 4 - 3n - 4$

**Or :**  $U_n = 4^n - 3n - 1 \Leftrightarrow U_n + 3n + 1 = 4^n$

Donc :  $U_{n+1} = (U_n + 3n + 1) \times 4 - 3n - 4 = 4U_n + 12n + 4 - 3n - 4$

$U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) (récurrence)

1 étapes : Pour  $n=0$  nous avons  $\frac{9}{0}$

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :

$\frac{9}{4^n - 3n - 1}$  donc  $\frac{9}{U_n}$

3 étapes : Montrons que :  $\frac{9}{U_{n+1}}$  ??

On a  $\frac{9}{U_n}$  et  $\frac{9}{9}$  donc  $\frac{9}{4U_n + 9n}$  donc  $\frac{9}{U_{n+1}}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice29 :** montrer que

$\frac{7}{1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}}$

**Solution29 :** on a :  $4 \equiv -3[7]$  et  $5 \equiv -2[7]$  et

$6 \equiv -1[7]$  donc :  $4^{2019} \equiv -3^{2019}[7]$  et  $5^{2019} \equiv -2^{2019}[7]$

et  $6^{2019} \equiv -1^{2019}[7]$

donc :  $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 1 + (-1)[7]$

Donc :  $1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019} \equiv 0[7]$

**Exercice30 :**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 4$  et  $n^2 - 3n + 4$  Sont des nombres pairs

2) En déduire que  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$  n'est pas premier

**Solution30 :** 1) soit  $n \in \mathbb{Z} \quad n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2]$

donc  $n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$  or  $n(n-1)$  est le produit de deux nombres consécutifs donc paire donc  $n(n-1) \equiv 0[2]$  donc  $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc  $n^2 - 3n + 4$  est un nombre paire

et on a :  $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2]$  donc

$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$

Or  $n(n+1)$  est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc  $n(n+1) \equiv 0[2]$  donc  $n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$

donc  $n^2 + 3n + 4$  est un nombre paire

2)  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$

Et puisque  $n^2 - 3n + 4$  et  $n^2 + 3n + 4$  sont des nombres paire

alors :  $n^2 - 3n + 4 \neq 1$  et  $n^2 + 3n + 4 \neq 1$

donc  $\alpha_n$  n'est pas un nombre premier

**Exercice31 :** montrer que  $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

**Solution31 :** on pose  $d = a \wedge (a+1)$

$\Rightarrow \frac{d}{a}$  et  $\frac{d}{a+1} \Rightarrow \frac{d}{1} \Rightarrow d = 1$

**Exercice32 :**  $n \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombre :  $A = n^2 + 3$  et  $B = n + 2$

1) montrer que  $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{n^2 + 3}{n+2} \in \mathbb{N}$

**Solution32 :** 1) on pose  $d = A \wedge B$  et

$d' = (n+2) \wedge 7$

On a :  $d = A \wedge B$

$\Rightarrow \frac{d}{A}$  et  $\frac{d}{B} \Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3}$  et  $\frac{d}{n+2}$

$\Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3}$  et  $\frac{d}{n+2}$  on utilisant la division euclidienne : on trouve :  $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$

$\Rightarrow \frac{d}{n^2 + 3 - (n+2)(n-2)}$

$\Rightarrow \frac{d}{7}$  et  $\frac{d}{n+2} \Rightarrow \frac{d}{(n+2) \wedge 7} \Rightarrow \frac{d}{d'}$

Inversement : On a :  $d' = (n+2) \wedge 7$

$\Rightarrow \frac{d'}{n+2}$  et  $\frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2)}$  et  $\frac{d'}{7}$

$\Rightarrow \frac{d'}{(n+2)(n-2) + 7}$  et  $\frac{d'}{7} \Rightarrow \frac{d'}{n^2 + 3}$  et  $\frac{d'}{7}$

donc :  $\frac{d'}{A \wedge B}$  donc  $\frac{d'}{d}$

donc  $\frac{d'}{d'}$  et  $\frac{d'}{d}$  et  $d \in \mathbb{N}$  et  $d' \in \mathbb{N}$  donc

donc  $d = d'$  donc :  $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2)  $\frac{n^2 + 3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^2 + 3}$  et on a :  $\frac{n+2}{n+2}$

Donc :  $\frac{n+2}{A \wedge B}$  Donc :  $\frac{n+2}{(n+2) \wedge 7}$

Donc :  $\frac{n+2}{7}$  or 7 est premier donc :

Il faut que  $n+2 \in \{1;7\}$  ce qui entraîne que  $n=5$

**Exercice33:**  $a=(25^n-1)(36^n-1)$  et  $b=(5^n-1)(6^n-1)$

Calculer les  $a \vee b$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Solution33 :**

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

**Exercice34 :** Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations

suites : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x > y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Solution34 :** a)  $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 32$

$x - y$  et  $x + y$  sont des diviseurs positifs de 32

Et  $(x - y) + (x + y) = 2x$  est un nombre pair

Donc  $x - y$  et  $x + y$  ont la même parité  $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x - y$	2	4
$x + y$	16	8
$x$	9	6
$y$	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

b)  $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)(y + 1) = 100$$

Donc :  $2x + 1$  et  $y + 1$  sont des diviseurs positifs de 100

$$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$$

$2x + 1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y + 1$	100	50	25	20	5	4	2	1
$x$	0			2		12		
$y$	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

**Exercice35 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$

**Solution35 :**  $n + 2/3n + 1$  et  $n + 2/n + 2$

$$n + 2/3n + 1 \text{ et } n + 2/3n + 6 \text{ donc}$$

$$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1) \text{ donc } n + 2/5$$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que  $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$  ce qui entraîne que

$$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$$

On vérifie que si  $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$  alors

$$n + 2/3n + 1 \text{ avant de conclure.}$$

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$  sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

**Exercice 36 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Solution36 :** Cette fraction a un sens si  $n + 4 \neq 0$ , soit  $n \neq -4$

$$\text{On constate que } 3n + 8 = 3(n + 4) - 4$$

$n + 4$  divise  $3(n + 4)$ , donc  $n + 4$  divise  $3n + 8$  si

$n + 4$  divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que  $n + 4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$  ce qui entraîne

$$\text{que } n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$  représente un entier

relatif pour les valeurs de l'entier relatif  $n$  : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

**Exercice37 :** déterminer :  $d = (-8316) \wedge 1080$

et  $m = 8316 \vee 1080$

**Solution 37:** la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

**Exercice38 :** si  $2 = a \wedge b$  et  $-12 = a \times b$

déterminer :  $a \vee b$

**Solution 38:** on a  $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / |a \wedge b| = |-12| / 2 = 6$$

**Exercice 39:**  $n$  et  $a$  et  $b$  des entiers naturels Démontrer que si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $q'$  est le quotient de  $q$

par  $b$  Alors  $q'$  est aussi le quotient de  $n$  par  $ab$

**Solution39 :** soit  $r$  le reste de la division

euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $r'$  le reste de la division euclidienne de  $q$  par  $b$  on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a - 1 \text{ et on a : } q = bq' + r'$$

et  $0 \leq r' \leq b - 1$  donc on déduit que :

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque :  $0 \leq r' \leq b - 1$  et  $0 \leq r \leq a - 1$  alors :

$$ar' + r \leq ab - 1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$$0 \leq ar' + r \leq ab - 1 \text{ conclusion : } q' \text{ est aussi le}$$

quotient de  $n$  par  $ab$

**Exercice 40:** Déterminer le reste de la division euclidienne de  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Solution40** : on a  $19 \equiv 5[7]$  donc  $19^2 \equiv 4[7]$

donc :  $19^4 \equiv 2[7]$  donc  $19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

Et on a  $23 \equiv 2[7]$  donc  $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$  donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$

Donc :  $23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7]$

donc  $23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7]$

donc  $23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$

et puisque :  $8 \equiv 1[7]$  donc  $23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$

Conclusion : 1 est le reste de la division

euclidienne de  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Exercice41** : 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$

2) montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^{2n+2} \equiv 1[15]$

**Solution41 :1)** on a :  $n+1 \equiv 1[n]$  donc :

$(n+1)^{2019} \equiv 1^{2019}[n]$  donc :  $(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$

2) on a :  $4^2 \equiv 1[15]$  donc :  $(4^2)^{n+1} \equiv 1^{n+1}[15]$

donc :  $4^{2n+2} \equiv 1[15]$

**Exercice42**:  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Solution42** :1) on a  $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

donc  $U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$

et puisque :  $U_n = 4^n - 3n - 1$  donc :

$4^n = U_n + 3n + 1$  donc :  $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) notons P(n) La proposition suivante :

« 9 divise  $U_n$  » .Nous allons démontrer par

réurrence que P(n) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0$  donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise  $U_n$  »

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « 9 divise  $U_{n+1}$  » ??

c'est-à-dire Montrons que  $U_{n+1} \equiv 0[9]$  ??

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

« 9 divise  $U_n$  » donc  $U_n \equiv 0[9]$  donc  $4U_n \equiv 0[9]$

Et on a :  $9n_n \equiv 0[9]$  donc  $U_n + 9n_n \equiv 0[9]$  donc

$U_{n+1} \equiv 0[9]$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice43** : Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation:

$$x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$$

**Solution43** : on Dresse une table des opérations

de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

Comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$x^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - \bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

$\bar{2}$  et  $\bar{4}$  sont les solutions de l'équation

Donc :  $S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$

**Exercice 44**:  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que :  $a = bc + d$

1) montrer que  $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que :  $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

**Solution44** :1) on pose  $\Delta_1 = a \wedge b$  et  $\Delta_2 = b \wedge d$

On a :  $\Delta_1/a$  et  $\Delta_1/b$  donc  $\Delta_1/a$  et  $\Delta_1/bc$  donc

$\Delta_1/a - bc$  donc  $\Delta_1/d$

donc  $\Delta_1/d$  et  $\Delta_1/b$  donc  $\Delta_1/b \wedge d$  donc  $\Delta_1/\Delta_2$

inversement On a :  $\Delta_2/b$  et  $\Delta_2/d$  donc  $\Delta_2/d$  et

$\Delta_2/bc$  donc  $\Delta_2/bc + d$  donc  $\Delta_2/a$

donc  $\Delta_2/a$  et  $\Delta_2/b$  donc  $\Delta_2/a \wedge b$  donc  $\Delta_2/\Delta_1$

On a donc :  $\Delta_1/\Delta_2$  et  $\Delta_2/\Delta_1$  et  $\Delta_1 \in \mathbb{N}$  et  $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc  $\Delta_1 = \Delta_2$

donc :  $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a :  $a = bc + (a - bc)$  si on prend :  $d = a - bc$  et

d'après 1) on aura :  $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

**Exercice45** :  $a \in \mathbb{N}$  On considère les deux nombres :  $A = 35a + 57$  et  $B = 45a + 76$  montrer que  $A \wedge B = 1$  ou  $A \wedge B = 19$

**Solution45** :1) on pose  $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$  et  $d/B \Rightarrow d/35a + 57$  et  $d/45a + 76$

$\Rightarrow d/9(35a + 57)$  et  $d/7(45a + 76)$

$$\Rightarrow d/_{315a+513} \text{ et } d/_{315a+532}$$

$\Rightarrow d/_{19}$  or 19 est premier donc :

Il faut que  $d \in \{1, 19\}$  ce qui entraine que :

$$A \wedge B = 1 \text{ ou } A \wedge B = 19$$

**Exercice 46 :**  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{N}^*$  On considère les

deux nombres :  $a = 9x + 4y$  et  $b = 2x + y$

1) montrer que  $x \wedge y = a \wedge b$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a) montrer que  $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles  $a \wedge b = d$

c) montrer que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a \wedge b = 1$$

**Solution 46 :** 1) on pose  $d = x \wedge y$  et  $d' = a \wedge b$

montrons que :  $d = d'$

$$d = x \wedge y \text{ donc : } \Rightarrow d/x \text{ et } d/y \Rightarrow d/a \text{ et } d/b$$

Car il divise toute combinaison de  $x$  et  $y$

$$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$$

Inversement :

$$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/9x+4y \text{ et } d'/2x+y$$

$$\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y) \text{ et } d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$$

$$\Rightarrow d'/x \text{ et } d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraine:  $d = d'$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a) montrons que  $a \wedge b = b \wedge 7$  ?

la division euclidienne de  $n^2 + 5n + 13$  par  $n + 3$

$$\text{donne : } n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$$

$$\text{Donc : } a = b(n + 2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n + 2) = 7$$

on pose  $d' = b \wedge 7$  et  $d = a \wedge b$

montrons que :  $d = d'$

$$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/a - b(n + 2) \text{ et } d/b$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

$$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7 \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/b(n + 2) + 7 \text{ et } d'/b$$

$$\Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraine:  $d = d'$

b) les valeurs possibles  $a \wedge b = d$  ??

$$\text{on a : } a \wedge b = b \wedge 7 = d$$

$$\text{donc : } d/7 \text{ donc : } d = 1 \text{ ou } d = 7$$

c) montrons que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n + 3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$$

d) les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $a \wedge b = 1$  ??

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n \text{ n'est pas congrue a } 0 \text{ modulo } 4$$

$$n \equiv 0[7] \text{ ou } n \equiv 1[7] \text{ ou } n \equiv 2[7] \text{ ou } n \equiv 3[7] \text{ ou } n \equiv 5[7]$$

$$\text{ou } n \equiv 6[7]$$

**Exercice 47:**  $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{on pose : } d_n = (2n + 8) \wedge (3n + 15)$$

1) montrer que  $d_n/6$

2) déterminer les entiers relatifs  $n$

tel que  $d_n = 6$

**Solution 47 :** 1) on a  $d_n = (2n + 8) \wedge (3n + 15)$

$$\Rightarrow d_n/2n+8 \text{ et } d_n/3n+15 \Rightarrow d_n/6n+24 \text{ et } d_n/6n+30$$

$$\Rightarrow d_n/30-24 \Rightarrow d_n/6$$

$$2) 6 = (2n + 8) \wedge (3n + 15) \Rightarrow 6/2n+8 \text{ et } 6/3n+15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n + 8 \equiv 0[6] \\ 3n + 15 \equiv 0[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 4[6] \\ 3n \equiv 3[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{2}n = \bar{4} \\ \bar{3}n = \bar{3} \end{cases}$$

On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$$

Comme suite :

$n$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}n$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}n$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$n = \bar{5}$  Est la solution de l'équation

$$n = \bar{5} \Leftrightarrow n = 5 + 6k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Inversement :

$$\text{Si } n = 5 + 6k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2n + 8 \equiv 0[6] \\ 3n + 15 \equiv 0[6] \end{cases} \text{ donc } 6/2n+8 \text{ et } 6/3n+15$$

$$\text{donc } 6/d_n \text{ et on a } d_n/6 \text{ donc } d_n = 6$$

**Exercice 48:**  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \geq 3$

et  $a$  est impair et on pose :  $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a) montrer que  $2^{ab} \equiv 1[d]$

b) montrer que  $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que :  $d \in \{1, 2\}$

3) montrer que  $d = 1$

**Solution 48 :** 1) a) montrons que  $2^{ab} \equiv 1[d]$

$$\text{On a : } d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$$

Donc il existent :  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in \mathbb{N}^*$  tels que :

$$2^a - 1 = d\alpha \text{ et } 2^b + 1 = d\beta \text{ donc :}$$

$$2^{ab} = (2^a)^b = (d\alpha + 1)^b$$

$$\text{Et on a : } d\alpha + 1 \equiv 1[d] \text{ Donc } (d\alpha + 1)^b \equiv 1[d]$$

$$\text{Par suite : } 2^{ab} \equiv 1[d]$$

$$1) \text{ a) montrons que } 2^{ab} \equiv -1[d]$$

$$\text{On a : } 2^{ab} = (2^b)^a = (d\beta - 1)^a$$

$$\text{Et on a : } d\beta - 1 \equiv -1[d] \text{ Donc } (d\beta - 1)^a \equiv (-1)^a [d]$$

$$\text{et puisque } a \text{ est impair on a } (d\beta - 1)^a \equiv -1[d]$$

$$\text{Par suite : } 2^{ab} \equiv -1[d]$$

$$2) d \in \{1; 2\} \text{ ???}$$

$$\text{on a : } 2^{ab} \equiv 1[d] \text{ et } 2^{ab} \equiv -1[d] \text{ donc } 0 \equiv 2[d]$$

$$\text{donc } d/2 \text{ et on a } d \in \mathbb{N}^* \text{ donc } d \in \{1; 2\}$$

$$3) \text{ montrons que } d = 1$$

On a :  $2^a - 1$  et  $2^b - 1$  sont impairs donc  $d$  est impair

$$\text{Et puisque } d \in \{1; 2\} \text{ donc } d = 1$$

**Exercice49** : montrer que :  $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21] \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution49** : on pose  $U_n = 2^{4^{n+1}} + 5$

notons P(n) La proposition suivante :

«  $U_n \equiv 0[21]$  ». Nous allons démontrer par

récurrence que P(n) est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$$U_0 = 2^4 + 5 = 21 \text{ donc } U_0 \equiv 0[21].$$

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : Supposons que P(n) soit vraie

c'est-à-dire :  $U_n \equiv 0[21]$

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que : «  $U_{n+1} \equiv 0[21]$  » ??

$$U_{n+1} = 2^{4^{n+2}} + 5 = 2^{4^{n+1} \times 4} + 5 = (2^{4^{n+1}})^4 + 5 = (U_n - 5)^4 + 5$$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$U_n \equiv 0[21] \text{ donc } U_n - 5 \equiv -5[21] \text{ donc}$$

$$(U_n - 5)^4 + 5 \equiv (-5)^4 + 5[21] \equiv 16 + 5[21] \equiv 0[21]$$

$$\text{Donc : } U_{n+1} \equiv 0[21]$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21]$

**Exercice 50** : déterminer le nombre entier naturel  $n$  Tel que le quotient de la division euclidienne de  $n$  par 25 est  $p$  et le reste est  $p^2$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

**Solution50** :  $n \in \mathbb{N}$

$$n = 25p + p^2 \text{ et } 0 \leq p^2 < 25 \text{ donc } 0 \leq p < 5$$

Donc :

$$\begin{cases} p = 0 \\ n = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 1 \\ n = 26 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 2 \\ n = 54 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 3 \\ n = 84 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 4 \\ n = 116 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$$

**Exercice51**:  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{Z}$

si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $a-1$  par  $b$  déterminer le quotient de la division euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

**Solution51** : soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a-1$  par  $b$  donc :

$$a - 1 = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

$$\text{Donc : } ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$$

On montre que :  $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$  ???

$$\text{On a : } 0 \leq r < b \text{ donc } 0 \leq r+1 \leq b$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10} \text{ donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$$

conclusion :  $q$  est aussi le quotient de la division euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

**Exercice52** : 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

$$2) \text{ montrer que: } 7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$$

**Solution52 :1)** on a :  $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc :

$$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$\text{Donc : } (n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+n^2+2n) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2 \left( 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right)$$

$$\text{on a : } n^2 \left( 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right) \equiv 0[n^2]$$

$$\text{donc : } (n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

$$2) \text{ on a : } 7 \equiv 7[10] \text{ et } 7^2 \equiv -1[10] \text{ donc } 7^4 \equiv 1[10]$$

Donc :  $7^{4k} \equiv 1[10]$  et  $7^{4k+1} \equiv 7[10]$  et  $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$$7^{4k+3} \equiv 3[10]$$

On aussi :  $7 \equiv 3[4]$  et  $7^2 \equiv 1[4]$

Donc  $7^{2k} \equiv 1[4]$  et  $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or :  $7^{7^{7^7}} \equiv 1[2]$  (car impair)

Donc :  $7^{7^{7^7}} \equiv 3[10]$

### Exercice53 :

1)a) en déduire que :  $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 5 du nombres  $2^n$

2) montrer que  $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que  $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

**Solution53 :** 1) a) on a :  $2^4 \equiv 1[5]$  donc

$$(2^4)^k \equiv 1^k [5] \text{ donc } 2^{4k} \equiv 1[5] \text{ donc } 2^{4k} \times 2^r \equiv 2^r [5]$$

Donc  $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k;r) \in \mathbb{N}^2$

b)  $2^n \equiv r[5]$  et  $r \in \{0;1;2;3;4\}$

Si  $n \in \mathbb{N}$  alors :  $n = 4k + r$  avec  $r \in \{0;1;2;3\}$

donc :  $2^{4k} \equiv 1[5]$  et  $2^{4k+1} \equiv 2[5]$  et  $2^{4k+2} \equiv 4[5]$

et  $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

2) montrons que  $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^* ?$

on a :  $17 \equiv 2[5]$  donc :  $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$

$$32^{4p+3} \equiv -2^{4p+3} [5] \quad 17^{4p+2} \equiv 4[5]$$

on a :  $32 \equiv 2[5]$  donc :  $32^{4p+3} \equiv 2^{4p+3} [5]$

donc :  $32^{4p+3} \equiv 3[5]$  donc  $32^{4p+3} \equiv 2[5]$

donc  $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3[5]$

donc  $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 0[5]$

donc  $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3)

on a :  $1 \equiv 1[5]$  et  $2 \equiv 2[5]$  et  $3 \equiv -2[5]$  et  $4 \equiv -1[5]$

donc :  $1^{2006} \equiv 1^{2006} [5]$  et  $2^{2006} \equiv 2^{2006} [5]$  et

$$3^{2006} \equiv (-2)^{2006} [5] \text{ et } 4^{2006} \equiv (-1)^{2006} [5]$$

**donc ;**  $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006} [5]$

$$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007} [5]$$

Or :  $2007 = 4 \times 501 + 3$  donc :  $2^{2007} \equiv 3[5]$

Donc :  $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$

**Exercice54 :** déterminer le chiffre des unités

des nombres suivants : 1)  $2019^{2020^{2021}}$  2)  $1987^{1991^{1983}}$

### Solution54 :

1) on a :  $2019 \equiv -1[10]$  donc

$$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}} [10] \text{ et puisque } 2020^{2021}$$

Est paire donc :  $2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a :  $1987 \equiv 7[10]$  donc  $1987^2 \equiv 9[10]$

Et  $1987^3 \equiv 3[10]$  et  $1987^4 \equiv 1[10]$

Donc :  $1987^{4k} \equiv 1[10]$  et  $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$  et

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$  et  $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$

$1991^{1983} \equiv ?[4]$

$1991 \equiv 3[4]$  et  $1991^2 \equiv 1[4]$

on a :  $1983 \equiv 1[2]$  donc :  $1991^{1983} \equiv 3[4]$

donc :  $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

**Exercice55 :** soit  $N = \overline{dcba}$  un entier naturel

montrer que :  $N \equiv a - b + c - d [11]$

### Solution55 :

on a :  $N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$

et on a :  $10 \equiv -1[11]$  et  $10^2 \equiv 1[11]$  et  $10^3 \equiv -1[11]$

Donc :  $N \equiv a - b + c - d [11]$

### Exercice56 :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :  $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs  $u$  et  $v$  tel que :  $39u + 67v = 1$

### Solution56 : 1)

$$(1) 67 = 1 \times 39 + \boxed{28} \quad (2) 39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$$

$$(3) 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad (4) 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$(5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad (6) 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc :  $67 \wedge 39 = 1$  c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$2) (5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7 \times 67 - 12 \times 39 = \boxed{1}}$$

**Exercices pour le 2bac sm**

**Exercice57** : montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

**Solution57** : on a :  $7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$

Donc :  $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$u(3n+1) + v(7n+2) = 1 \quad u = 7 \text{ et } v = -3$$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

**Exercice58** : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

**Solution58** :  $\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x + 2 = 7y + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x - 7y = 1 \text{ Or on sait que :}$$

$7 \wedge 11 = 1$  Donc d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u + 7v = 1$$

Donc il suffit de prendre :  $\begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$

$$\text{Donc } \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

**Exercice59** : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante : (E)  $7(x-2) = 3(y+1)$

**Solution59** :  $7(x-2) = 3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que :  $7 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss :  $7/y+1$

Donc  $\exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3 \times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{(3k+2; 7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice60** : déterminer l'entier naturel  $n$  tel

$$\text{que : } \frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$$

**Solution60** : 1) 2)  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 \mid n(n^2+3n-2)$

or on a :  $1 = (n+1) \wedge n$  car  $(n+1) - n = 1$  (bezout)

$$\text{Donc : } n+1 \mid n^2+8n-2$$

La division euclidienne de  $n^2+3n-2$  par  $n+1$

$$\text{Donne : } n^2+3n-2 = (n+1)(n+2) - 4$$

$$\begin{aligned} n+1 \mid n^2+3n-2 &\Leftrightarrow n+1 \mid n^2+3n-2 - (n+1)(n+2) \\ &\Leftrightarrow n+1 \mid -4 \Leftrightarrow n+1 \mid 4 \end{aligned}$$

Il faut que  $n+1 \in \{1; 2; 4\}$  ce qui entraîne :

$$n \in \{0; 1; 3\}$$

Inversement : On vérifie que 0 ; 1 ; 3 vérifient

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ Avant de conclure que :}$$

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3\}$$

**Exercice61** : déterminer dans  $\mathbb{N}^2$  les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

**Solution61** :  $\begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x + y = 48 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / 4x' + 4y' = 48$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / x' + y' = 12$$

on Dresse une table comme suit :

$x'$	0	1	2	3	4	5	6
$y'$	12	11	10	9	8	7	6
$x$	0	4	8	12	16	20	24
$y$	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$$S = \{(0; 48); (4; 44); (8; 40); (12; 36); (16; 32); (20; 28); (24; 24)\}$$

**Exercice62**: résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

**Solution5762**:

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Car  $2 \wedge 7 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5 + 7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1 + 5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 7(1 + 5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice63:** 1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$  et  $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

**Solution63:** on pose  $d = a \wedge (a+b)$  montrons que :

$$\begin{aligned} d=1 \text{ on a : } d &= a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/a+b \\ \Rightarrow d/a \text{ et } d/a+b-a &\Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge a \Rightarrow \\ d/1 &\Rightarrow d=1 \text{ ce qui entraine: } 1 = a \wedge (a+b) \text{ (1)} \end{aligned}$$

de même on montre que :  $1 = b \wedge (a+b)$  (2)

de (1) et (2) en déduit que :  $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a  $a \wedge (a+b) = 1$  et  $a \wedge b = 1$  donc

$a \wedge b(a+b) = 1$  D'après la même proposition

**Exercice64 :** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

**Solution64 :** on a :  $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

$$\text{Et on a : } (2n+5) - 2(n+2) = 1$$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+2) \wedge (2n+5) = 1 \text{ (1)}$$

De même : on a :  $2(n+3) - (2n+5) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+3) \wedge (2n+5) = 1 \text{ (2) de (1) et (2) en déduit}$$

$$\text{que : } (2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$$

$$\text{Donc : } (2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

**Exercice65 :** en utilisant Fermat Montrer que :

$$1) 3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1[11]$$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$$

**Solution65 :** 1) On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 3 alors  $3^{10} \equiv 1[11]$  Donc :  $3^{13} \equiv 3^3[11] \equiv 5[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 5 alors  $5^{10} \equiv 1[11]$  Donc :  $5^{35} \equiv 5^5[11] \equiv 1[11]$

De même : On a : 11 est premier et 11 ne divise pas 7 alors  $7^{10} \equiv 1[11]$

$$\text{Donc : } 7^{57} \equiv 7^7[11] \equiv 6[11]$$

$$\text{Finalement on a : } 3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 5+1+6[11] \equiv 1[11]$$

$$2) 2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17] \text{ ??}$$

On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 2 alors  $2^{16} \equiv 1[17]$  donc :  $2^{16n+1} \equiv 2^1[17] \equiv 2[17]$

De même : On a : 17 est premier et 17 ne divise pas 7 alors  $7^{16} \equiv 1[17]$  donc :  $7^{32} \equiv 1[17]$

$$\text{donc : } 7^{32n+2} \equiv 7^2[17] \equiv 15[17]$$

Finalement on a :  $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0[17]$

**Exercice66 :** écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

**Solution66 :**

$$1) \text{On a : } 73 = 3 \times 24 + 1 \quad q_0 = 24 \text{ et } r_0 = 1$$

$$24 = 3 \times 8 + 0 \quad q_1 = 8 \quad \text{et } r_1 = 0$$

$$8 = 3 \times 2 + 2 \quad q_2 = 2 \quad \text{et } r_2 = 2$$

$$2 = 3 \times 0 + 2 \quad q_3 = 0 \quad \text{et } r_3 = 2$$

$$\text{Donc : } 73 = \overline{r_3 r_2 r_1 r_0}_{(3)} = \overline{2201}_{(3)}$$

$$73 = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0$$

**Exercice67 :** déterminer les entiers naturels

$$x \text{ et } y \text{ tel que : } \overline{x0}_{y(5)} = \overline{y0}_{x(7)}$$

**Solution67 :**

$$\overline{x0}_{y(5)} = \overline{y0}_{x(7)} \Leftrightarrow x \times 5^2 + 0 \times 5^1 + y \times 5^0 = y \times 7^2 + 0 \times 7^1 + x \times 7^0$$

$$\Leftrightarrow 25x + y = x + 49y \Leftrightarrow 48y = 24x \Leftrightarrow 2y = x$$

$$\Leftrightarrow (x; y) = (2k; k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq x \leq 3 \text{ et}$$

$$0 \leq y \leq 3 \text{ Donc : } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Exercice68 :1)** résoudre dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$\overline{2}x^3 + x + \overline{3} = \overline{0}$$

2) déterminer les entiers naturels  $n$  tels que :

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)}$$

**Solution68 :** On Dresse une table dans

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}\} \text{ Comme suite :}$$

$n$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}x^3$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{2}x^3 + x + \overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\overline{2}$  et  $\overline{6}$  sont les solutions de l'équation

$$\text{Donc : } S = \{\overline{2}; \overline{6}\}$$

$$2) \overline{2013}_{(n)} = 2 \times n^3 + 0 \times n^2 + 1 \times n^1 + 3 \times n^0 = 2n^3 + n + 3$$

$$7 \text{ divise } \overline{2013}_{(n)} \Leftrightarrow 2n^3 + n + 3 \equiv 0[7]$$

$$\Leftrightarrow \overline{2}n^3 + n + \overline{3} = \overline{0} \text{ Donc : } n = \overline{2} \text{ ou } n = \overline{6}$$

$$\text{Donc : } n = 7k + 2 / k \in \mathbb{N} \text{ ou } n = 7k + 6 / k \in \mathbb{N}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien

