Exercices corrigés d'arithmétique dans N Partie III

AHMED AGOUZAL

Exercice 8 :

a – Décomposer 1008 et 1608 en produit de facteurs premiers.

b – Déduire PGCD(1008 , 1608) et PPCM(1008 , 1608) .

c - En déduire la forme irréductible de $\frac{1008}{1608}$ et de $\frac{1}{1608}+\frac{1}{1008}$

d – Déterminer l'entier naturel n tel que n + 4 divise n + 17

Exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels tel que : **$a \wedge b = 18$** **PGCD(a , b) = $a \wedge b$**

1 – Déterminer tous les diviseurs communs de a et b

2 – Sachant que ab = 972 calculer $a \vee b$ et en déduire a et b

Exercice 10 :

Soient les entiers naturels a = 2352 et b = 14850

1 – Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

2 – Donner le nombre de diviseurs de chacun des entiers a et b.

3 – Déterminer PGCD(a ,b) et PPCM(a ,b).

4 – Déterminer le plus petit entier p tel que le nombre pa soit un carré parfait.

5 – Déterminer le plus petit entier q tel que le nombre qb soit un cube parfait

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 8 :

a – Décomposer 1008 et 1608 en produit de facteurs premiers.

1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

1608	2
804	2
402	2
201	3
67	67
1	

$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$

$1608 = 2^3 \times 3 \times 67$

b – Déduire PGCD(1008 , 1608) et PPCM(1008 , 1608)

$1608 = 2^3 \times 3 \times 67$

$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$

$PGCD(1008\ ,\ 1608) = 2^3 \times 3 = 24$

$PPCM(1008\ ,\ 1608) = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67 = 67536$

PPCM(a , b) est le produit des facteurs premiers communs ou non à a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

c - En déduire la forme irréductible de $\frac{1008}{1608}$ et de $\frac{1}{1608}+\frac{1}{1008}$

$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$; $1608 = 2^3 \times 3 \times 67$

On a $\frac{1008}{1608}=\frac{2^4\times 3^2\times 7}{2^3\times 3\times 67}=\frac{2\times 3\times 7}{67}=\frac{42}{67}$

On a PPCM(1008 , 1608) = $2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67 = 67536$

On a $\frac{1}{1608}+\frac{1}{1008}=\frac{1}{2^3\times 3\times 67}+\frac{1}{2^4\times 3^2\times 7}=\frac{2\times 3\times 7}{2^4\times 3^2\times 7\times 67}+\frac{67}{2^4\times 3^2\times 7\times 67}$

D'ou $\frac{1}{1608}+\frac{1}{1008}=\frac{42+67}{2^4\times 3^2\times 7\times 67}=\frac{109}{67536}$

d – Déterminer n tel que n + 4 divise n + 17

Pour que (n + 4) divise n + 17 il faut que $\frac{n+17}{n+4}\in\mathbb{N}$

On a $\frac{n+17}{n+4}=\frac{n+4+13}{n+4}=\frac{n+4}{n+4}+\frac{13}{n+4}$ donc $\frac{n+17}{n+4}=1+\frac{13}{n+4}$

Pour que (n + 4) divise n + 17 il faut que (n + 4) divise 13 Les diviseurs de 13 sont : 1 ;13.

Donc n + 4 = 1 ou n + 4 = 13 donc n = 1 – 4 ou n = 13 – 4 donc n = – 3 ou n = 9

Or $-3\notin\mathbb{N}$ d'où n = 9

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels tel que : $\mathbf{a \wedge b = 18}$

1 – Déterminer tous les diviseurs communs de a et b

les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de 18

les diviseurs de 18 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18

D'où les diviseurs communs de a et b sont $D_{18} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 \}$

2 – Sachant que ab = 972 calculer a v b et en déduire a et b

On sait que $\mathbf{(a \vee b) \times (a \wedge b) = a \times b}$ donc $\mathbf{a \vee b = \dfrac{ab}{a \wedge b}}$

Donc $\mathbf{a \vee b} = \dfrac{972}{18} = 54$

$a \wedge b = 18$ et $a \wedge b$ divise a et b

$ab = 18 \times 18 \times 3$

$a = 18$ et $b = 18 \times 3$ ou $a = 18 \times 3$ et $b = 18$

$a = 18$ et $b = 54$ ou $a = 54$ et $b = 18$

Exercices d’arithmétique

<u>Solution de l’exercice 10 :</u>

Soient les entiers naturels a = 2352 et b = 14850

1 – Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 14850 & 2 \\ 7425 & 3 \\ 2475 & 3 \\ 825 & 3 \\ 275 & 5 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2352 & 2 \\ 1176 & 2 \\ 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11}$$

$$\mathbf{2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2}$$

Le nombre de diviseurs d'un nombre est égal au produit des puissances de chacun de ses facteurs premiers, augmentée de 1.

2 – Donner le nombre de diviseurs de chacun des entiers a et b.

$$\mathbf{a = 2^{4} \times 3^{1} \times 7^{2}}$$

$$\mathbf{(4+1)\,(1+1)\,(2+1) = 5\times2\times3 = 30}$$

le nombre de diviseurs de a est 30

$$\mathbf{b = 2^{1} \times 3^{3} \times 5^{2} \times 11^{1}}$$

$$\mathbf{(1+1)\,(3+1)\,(2+1)\,(1+1) = 2\times4\times3\times2}$$

le nombre de diviseurs de b est 48

Exercices d'arithmétique

3 – Déterminer PGCD(a ,b) et PPCM(a ,b).

$a = 2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$

$b = 14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

PGCD(a , b) $= 2 \times 3 = 6$

PPCM(a , b) $= 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 5821200$

4 – Déterminer le plus petit entier p tel que le nombre pa soit un carré parfait.

$a = 2^4 \times 3 \times 7^2$ donc $a = (2^2 \times 7)^2 \times 3$

Pour déterminer le plus petit entier naturel p pour que pa soit un carré parfait
il suffit de prendre p = 3

$3a = 3 \times 2^4 \times 3 \times 7^2$ donc $3a = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$

Le plus petit entier naturel p pour que pa soit un carré parfait est p = 3

5 - Déterminer le plus petit entier naturel q tel que le nombre qb soit un cube parfait

$b = 14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$2^2 \times 5 \times 11^2 \times b = 2^2 \times 5 \times 11^2 \times 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$2^2 \times 5 \times 11^2 = 2420$

$2420b = (2 \times 3 \times 5 \times 11)^3$ donc $2420b = (330)^3$

Le plus petit entier naturel q pour que qb soit un cube parfait est q = 2420