

Exercices corrigés d'arithmétique dans \mathbb{N} Partie III

Exercices d'arithmétique

Exercice 8 :

a – Décomposer 1008 et 1608 en produit de facteurs premiers.

b – Déduire $\text{PGCD}(1008, 1608)$ et $\text{PPCM}(1008, 1608)$.

c - En déduire la forme irréductible de $\frac{1008}{1608}$ et de $\frac{1}{1608} + \frac{1}{1008}$

d – Déterminer l'entier naturel n tel que $n + 4$ divise $n + 17$

Exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels tel que : $a \wedge b = 18$ $\text{PGCD}(a, b) = a \wedge b$

1 – Déterminer tous les diviseurs communs de a et b

2 – Sachant que $ab = 972$ calculer $a \vee b$ et en déduire a et b

Exercice 10 :

Soient les entiers naturels $a = 2352$ et $b = 14850$

1 – Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

2 – Donner le nombre de diviseurs de chacun des entiers a et b .

3 – Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ et $\text{PPCM}(a, b)$.

4 – Déterminer le plus petit entier p tel que le nombre pa soit un carré parfait.

5 – Déterminer le plus petit entier q tel que le nombre qb soit un cube parfait

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 8 :

a – Décomposer 1008 et 1608 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 1008 & 2 \\ 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1608 & 2 \\ 804 & 2 \\ 402 & 2 \\ 201 & 3 \\ 67 & 67 \\ 1 & \end{array}$$

$$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$$

$$1608 = 2^3 \times 3 \times 67$$

b – Déduire PGCD(1008 , 1608) et PPCM(1008 , 1608)

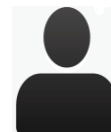
$$\bullet \quad 1608 = 2^3 \times 3 \times 67$$

$$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$$

$$\text{PGCD}(1008 , 1608) = 2^3 \times 3 = 24$$

$$\text{PPCM}(1008 , 1608) = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67 = 67536$$

PPCM(a , b) est le produit des facteurs premiers communs ou non à a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.



Exercices d'arithmétique

c - En déduire la forme irréductible de $\frac{1008}{1608}$ et de $\frac{1}{1608} + \frac{1}{1008}$

$$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 ; 1608 = 2^3 \times 3 \times 67$$

$$\text{On a } \frac{1008}{1608} = \frac{2^4 \times 3^2 \times 7}{2^3 \times 3 \times 67} = \frac{2 \times 3 \times 7}{67} = \frac{42}{67}$$

$$\text{On a } \text{PPCM}(1008, 1608) = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67 = 67536$$

$$\text{On a } \frac{1}{1608} + \frac{1}{1008} = \frac{1}{2^3 \times 3 \times 67} + \frac{1}{2^4 \times 3^2 \times 7} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67} + \frac{67}{2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{1608} + \frac{1}{1008} = \frac{42 + 67}{2^4 \times 3^2 \times 7 \times 67} = \frac{109}{67536}$$

d – Déterminer n tel que n + 4 divise n + 17

Pour que (n + 4) divise n + 17 il faut que $\frac{n+17}{n+4} \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } \frac{n+17}{n+4} = \frac{n+4+13}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} + \frac{13}{n+4} \text{ donc } \frac{n+17}{n+4} = 1 + \frac{13}{n+4}$$

Pour que (n + 4) divise n + 17 il faut que (n + 4) divise 13 Les diviseurs de 13 sont : 1 ; 13.

Donc n + 4 = 1 ou n + 4 = 13 donc n = 1 - 4 ou n = 13 - 4 donc n = -3 ou n = 9

Or -3 \notin \mathbb{N} d'où n = 9

Exercices d'arithmétique

Solution de l'exercice 9 :

Soient a et b deux entiers naturels tel que : $\mathbf{a \wedge b = 18}$

1 – Déterminer tous les diviseurs communs de a et b

les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de 18

les diviseurs de 18 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18

D'où les diviseurs communs de a et b sont $\mathbf{D_{18} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 \}}$

2 – Sachant que $ab = 972$ calculer $a \vee b$ et en déduire a et b

On sait que $(\mathbf{a \vee b}) \times (\mathbf{a \wedge b}) = \mathbf{a \times b}$ donc $\mathbf{a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b}}$

Donc $\mathbf{a \vee b = \frac{972}{18} = 54}$

$\mathbf{a \wedge b = 18}$ et $\mathbf{a \wedge b}$ divise a et b $\mathbf{ab = 18 \times 18 \times 3}$

$\mathbf{a = 18}$ et $\mathbf{b = 18 \times 3}$ ou $\mathbf{a = 18 \times 3}$ et $\mathbf{b = 18}$

$\mathbf{a = 18}$ et $\mathbf{b = 54}$ ou $\mathbf{a = 54}$ et $\mathbf{b = 18}$

Exercices d'arithmétique

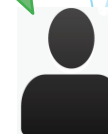
Solution de l'exercice 10 :

Soient les entiers naturels $a = 2352$ et $b = 14850$

1 – Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

14850		2		2352		2
7425		3		1176		2
2475		3		588		2
825		3	$14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$	294		2
275		5		147		3
55		5	$2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$	49		7
11		11		7		7
1				1		

Le nombre de diviseurs d'un nombre est égal au produit des puissances de chacun de ses facteurs premiers, augmentée de 1.



2 – Donner le nombre de diviseurs de chacun des entiers a et b .

$$a = 2^4 \times 3^1 \times 7^2$$

$$(4+1)(1+1)(2+1) = 5 \times 2 \times 3 = 30$$

le nombre de diviseurs de a est 30

$$b = 2^1 \times 3^3 \times 5^2 \times 11^1$$

$$(1+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 2 \times 4 \times 3 \times 2$$

le nombre de diviseurs de b est 48

Exercices d'arithmétique

3 – Déterminer PGCD(a ,b) et PPCM(a ,b).

$$a = 2352 = 2^4 \times 3 \times 7^2 \quad \text{PGCD}(a , b) = 2 \times 3 = 6$$

$$b = 14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11 \quad \text{PPCM}(a , b) = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 5821200$$

4 – Déterminer le plus petit entier p tel que le nombre pa soit un carré parfait.

$$a = 2^4 \times 3 \times 7^2 \quad \text{donc} \quad a = (2^2 \times 7)^2 \times 3$$

Pour déterminer le plus petit entier naturel p pour que pa soit un carré parfait il suffit de prendre $p = 3$

$$3a = 3 \times 2^4 \times 3 \times 7^2 \quad \text{donc} \quad 3a = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$$

Le plus petit entier naturel p pour que pa soit un carré parfait est $p = 3$

5 - Déterminer le plus petit entier naturel q tel que le nombre qb soit un cube parfait

$$b = 14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$$

$$2^2 \times 5 \times 11^2 \times b = 2^2 \times 5 \times 11^2 \times 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11 \quad 2^2 \times 5 \times 11^2 = 2420$$

$$2420b = (2 \times 3 \times 5 \times 11)^3 \quad \text{donc} \quad 2420b = (330)^3$$

Le plus petit entier naturel q pour que qb soit un cube parfait est $q = 2420$