

## LES SUITES NUMERIQUES

### I) RAPPELLES

#### 1) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

**Activité :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

**Solution :1)** on a  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour  $n=0$  on a :  $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$  donc  $u_1 = \sqrt{2}$

Pour  $n=1$  on a :  $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$  donc  $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour  $n=2$  on a :  $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$  donc

$$u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$$

2) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$$u_0 = 0 \text{ donc } 0 \leq u_0.$$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que :  $0 \leq u_n$

3 étapes : Montrons alors que :  $0 \leq u_{n+1} ??$

$$\text{Or on a : } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq 0$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$$

3) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

$$u_n \leq 2$$

1 étapes : l'initialisation : Pour  $n=0$  nous avons

$$u_0 = 0 \text{ donc } u_0 \leq 2.$$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que :  $u_n \leq 2$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq 2 ??$

$$\text{on a : } u_n \leq 2 \text{ donc } u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} \\ \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$$

$$\text{Par suite : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 0

$$\text{car } u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0

$$\text{car } 0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$$

**Définition :** Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique.

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe

un réel  $M$  tel que :  $\forall n \in I : u_n \leq M$

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe

un réel  $m$  tel que :  $\forall n \in I : m \leq u_n$

• On dit que la suite  $((u_n)_{n \in I})$  est bornée si elle est majorée et minorée.

**Exemple :** soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est minorée par 0

2) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{2}$

3) Que peut-on déduire ?

**Solution :1)** Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq v_n ??$

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ (Le conjugué)}$$

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 0$$

$$\text{Donc : } 0 \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Donc :  $(v_n)_{n \geq 1}$  est minorée par 0

2) Montrons que :  $v_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On a :  $n \geq 1$  et  $n+1 \geq 2$  donc  $\sqrt{n} \geq 1$  et  $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}$

Donc :  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 + \sqrt{2}$  donc

$$-(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq -1 - \sqrt{2}$$

donc  $2 - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \leq 1 - \sqrt{2}$  et puisque :  $1 - \sqrt{2} < 0$

Donc  $v_n - \frac{1}{2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc  $v_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{2}$

3) Donc la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est bornée car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n < \frac{1}{2}$$

**Exercice1** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Solutions** : Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad -1 \leq -\sin \sqrt{n} \leq 1$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad 2 \leq 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4$$

$$\text{donc : } 1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{4} \leq \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$$

cad :  $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$  donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Propriété** : Une suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée si et seulement s'il existe un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad |u_n| \leq M$$

**Exemple** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Solutions** : Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$|u_n| = |(-1)^n \sin \sqrt{n}| = |(-1)^n| |\sin \sqrt{n}| = |\sin \sqrt{n}| \leq 1$$

donc  $|u_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**2) Monotonie d'une suite.**

**Activité2** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer par récurrence que  $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solutions** : 1 étapes : on a  $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour  $n=0$  nous avons  $u_0 = 1$  donc  $u_0 \leq u_1$ .

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que :  $u_n \leq u_{n+1}$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad ??$

on a :  $u_n \leq u_{n+1}$  donc  $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$

donc :  $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$  donc  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

**Définition** : Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si :

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si :

$$\forall n \in I \quad \forall m \in I : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in I}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante sur  $I$ .

**Théorème** : Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique.

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante si et seulement si :

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$$

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante si et

seulement si :  $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

**Exemple1** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Solutions :**

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \text{Donc : } u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**Exemple2 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{Solutions : } u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$\text{Et on a : } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'} \quad \text{on pose } k' = k+1$$

Et puisque  $k'$  est un variable on peut l'appeler  $k'$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k'=2}^{n+2} \frac{1}{n+k'} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**Exercice 2:** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 2

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Solutions :** 1) Montrons que  $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ????

1 étapes :  $n=0$  on a :  $2 \leq u_0$  car  $2 < 3$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $2 \leq u_n$

3 étapes : Montrons alors que :  $2 \leq u_{n+1}$  ??

$$u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a : } 2 \leq u_n$$

Donc :  $u_n - 2 \geq 0$  et  $u_n + 2 > 0$

Donc :  $u_{n+1} - 2 \geq 0$

donc  $2 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que  $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ????

1 étapes :  $n=0$  on a :  $u_0 \leq 4$  car  $3 < 4$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $u_n \leq 4$

3 étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \leq 4$  ??

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{4(u_n + 2) - 8(u_n - 1)}{u_n + 2} = \frac{-4u_n + 16}{u_n + 2}$$

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \quad \text{et puisque on a :}$$

$$u_n \leq 4$$

Donc :  $4 - u_n \geq 0$  et  $u_n + 2 > 0$

Donc  $u_{n+1} \leq 4$  par suite  $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$3) u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n = \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$$

On va factoriser  $-u_n^2 + 6u_n - 8$  :  $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$

$$x_1 = \frac{-6+2}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-2}{-2} = 4 \quad \text{donc :}$$

$$-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n - 2)(u_n - 4)$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

Or on a :  $u_n \geq 2$  et  $u_n \leq 4$

Donc :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \geq 0$  donc la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**3) Suite arithmétique et géométrique**

**Définition1 :** On appelle suite **arithmétique** toute

suite  $(u_n)_{n \in I}$  définie par son premier terme et par

la relation récurrente :  $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où  $r$  est un réel fixe. Le réel  $r$  s'appelle la **raison** de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

**Propriétés : d'une suite arithmétique.**

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_p$  l'un de ses termes.

$$1) u_n = u_p + (n - p)r \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)}{2} (u_p + u_n)$$

**Définition2 :** On appelle suite géométrique toute suite  $(u_n)_n$  définie par son premier terme et par la relation récurrente :  $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$  où  $q$  est un réel fixe. Le réel  $q$  s'appelle la **raison** de la suite  $(u_n)_n$ .

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

**Propriétés : d'une suite géométrique**

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et si  $p$  est un entier naturel alors :

$$1) u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Si  $q = 1$  alors :  $s_n = (n - p + 1)u_p$

Si  $q \neq 1$  alors :  $s_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

**Exemple1 :** Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répondit-il, donne-moi seulement 1 centime le 1<sup>er</sup> juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne moi la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

**Solution :** Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est :  $u_1 = 1$  et la raison  $q = 2$

$u_2 = 2$  (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = \dots$  (La somme à donner le 20<sup>e</sup> jour)

Donc :  $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$  Centimes

La somme totale à payer serait :

$$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20} = u_1 \frac{1 - 2^{20-1+1}}{1 - 2}$$

$$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$$

centimes  $s_{20} \approx 1$  million 500dh Joli voyage !

**Exemple2 :** calculer en fonction de  $n$  la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

**Solutions :** 1) on pose :  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a :  $(u_n)_n$  une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$  Car :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$  Donc :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

**Exercice3 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$

c) calculer la somme :  $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

**Solution : 1)** montrons par récurrence que

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 étapes :  $n=0$   $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que:  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3 étapes : Montrons alors que :

$$u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}} \quad ??$$

on a:  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$  donc  $u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a :  $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right) \text{ donc } u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a:  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$

Donc :  $v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) \text{ donc } v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

2) b) écrire  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$

On a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{9} \text{ et de premier terme } v_0 = 1$$

Donc :  $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque :  $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$  donc  $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c)  $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad ??$

$$u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

on a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites

géométriques de raison  $q = \frac{1}{9}$  et  $q' = \frac{1}{3}$  donc

donc  $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + \sum_{k=0}^{k=n} w_k$

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} + w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

**Exercice4** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in ]-1; 0[ \end{cases}$$

1) Montrer que  $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

3) Montrer que  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et en déduire que :  $u_n \geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0 + 2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution** : 1) montrons par récurrence que

$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 étapes :  $n=0$  on a :  $-1 < u_0 < 0$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2 étapes : Supposons que:  $-1 < u_n < 0$

3 étapes : Montrons alors que :  $-1 < u_{n+1} < 0 \quad ??$

On a :  $-1 < u_n < 0$  donc :  $1 < u_n + 2 < 2$

donc :  $1 < \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{2}$  donc :  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$

et puisque :  $0 < -u_n < 1$  alors :  $0 < \frac{-u_n}{\sqrt{u_n + 2}} < 1$

donc :  $-1 < \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} < 0$  donc  $-1 < u_{n+1} < 0$

d'où :  $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} (1 - \sqrt{u_n+2})$$

et puisque :  $1 - \sqrt{u_n+2} < 0$  et  $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} < 0$

alors :  $u_{n+1} - u_n > 0$  donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

3) Montrons que  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $u_n \geq u_0$  car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante

Donc :  $\sqrt{2+u_n} \geq \sqrt{2+u_0}$  cad  $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque :  $u_n < 0$  alors :  $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc :  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 > u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc :  $0 \leq -u_{n+1} \leq \frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$$0 \leq -u_1 \leq \frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$$

$$0 \leq -u_2 \leq \frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$$

.....

$$0 \leq -u_{n-1} \leq \frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$$

$$0 \leq -u_n \leq \frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$$

Le produit des inégalités donne :

$$0 < -u_n \leq \frac{-u_0}{(\sqrt{u_0+2})^n}$$

Donc :  $u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0+2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique

2) écrire  $u_n$  en fonction de n

Solution :

$$1) v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 3 \left( 1 - \frac{2}{u_n} \right) \text{ donc } v_{n+1} = 3v_n$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = 3$  et de premier terme  $v_0 = -3$

2) écrire  $u_n$  en fonction de n

On a  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$q = 3$  et de premier terme  $v_0 = -3$

Donc :  $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque :  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$  donc  $u_n = \frac{2}{1-v_n}$  donc  $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

## II) LIMITE D'UNE SUITE

### 1) Activités :

**Activité 1 :** soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = 1 + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "limite" pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand n tend vers  $+\infty$

(b) que devient la valeur de  $u_n$  lorsque n tend vers  $+\infty$  ?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

**Remarques :**  $u_n = 1 + n^2$

n	1	2	10	100	1000	10000
$u_n$	2	5	101	10001	1000001	100000001

On note alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Tous les termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang

**Activité 2 :** soit la suite  $(u_n)$  définie :  $u_n = 1 - \sqrt{n}$  pour  $n \geq 0$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "limite" pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand n tend vers  $+\infty$

(b) que devient la valeur de un lorsque n tend

vers  $+\infty$  ?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

**Remarques :**  $u_n = 1 - \sqrt{n}$

$n$	1	2	10	100	1000	10000
$u_n$	0	$\simeq -0,4$	$\simeq -2,2$	-9	$\simeq -30,7$	-99

On note alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

tous les termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont aussi petits que l'on veut à partir d'un certain rang

**Activité 3 :** soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

pour  $n \geq 1$

(a) à la calculatrice, conjecturer une "valeur limite"  $l$  pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

(b) que devient la distance entre  $u_n$  et 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

Que dit-on alors ? (En terme de limite)

**on dit :** que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers une limite 1

**Remarques :**  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

$n$	1	2	10	100	1000	10000
$u_n$	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$ u_n - 1 $	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001

La distance entre  $u_n$  est 1 "se rapproche" de 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  : on note alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

**Remarque :** L'expression « quand  $n$  tend vers  $+\infty$  » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et on se contente d'écrire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

**Remarque :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$

**Propriété :** (limites de référence)

Les suites  $(n); (n^2); (n^p) p \in \mathbb{N}^*; (\sqrt{n})$

tendent Vers  $+\infty$  en écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$   $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

**Propriété :** (limites de référence)

Les suites  $\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n^2}\right); \left(\frac{1}{n^3}\right); \left(\frac{1}{n^p}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

tendent Vers  $+\infty$  en écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$   $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

**Définition 4 :** 1) Une suite qui tend vers une limite finie  $l$  s'appelle une suite convergente.

2) Une suite qui n'est pas convergente est une suite divergente.

**Exemples :** 1) les suites :  $\left(\frac{1}{n}\right); \left(\frac{1}{n^2}\right); \left(\frac{1}{n^3}\right);$

$\left(\frac{1}{n^p}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  sont des suites convergentes

2) les suites :  $(n); (n^p) p \in \mathbb{N}^*; (\sqrt{n}); (\cos n); ((-1)^n)$  sont divergentes.

**Théorème :** Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie  $l$  cette limite est unique

**4) Opération sur les limites des suites.**

**4-1) Limite de la somme :**

$\lim u_n$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Formes indéterminées

**4-2) Limites des produits**

$\lim u_n$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Formes indéterminées

**4-3) Limites des inverses**

$\lim u_n$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

**4-4) Limites des quotients**

$\lim u_n$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$0$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Formes indéterminées    Formes indéterminées

**Propriété :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**Exemple :** Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1$     2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$

4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$

5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5$

6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$

### Solutions :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3+0)(1+0) = (-3)(1) = -3$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \quad \text{directement on trouve une}$$

forme indéterminée  $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$  et

$$+\infty \times +\infty = +\infty$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n \quad \text{directement on trouve une forme}$$

indéterminée  $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$$

Car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$  et

$$+\infty \times -\infty = -\infty$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(4 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$$

Et puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5 = +\infty$

6)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$$

car :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n)(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)}{(\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n + 2}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(-3 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(\sqrt{\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} + 1\right)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} + 1} = -\frac{3}{2}$$

**Remarques :** 1) La limite d'une suite polynôme en est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une suite rationnelle

en est la limite du rapport des termes de plus grand degré

**Exemple :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} \quad 4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} \quad 5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$$

**Solutions :**

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^5 = -\infty$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times n = +\infty$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

**Exercice 5:** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$$

**Solutions :**

1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - n)(\sqrt{n^2+n+1} + n)}{(\sqrt{n^2+n+1} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(\sqrt{n^2+n+1} + n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + n\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

**5) Les limites et l'ordre et techniques de calculs des limites et critères de convergences.**

**Théorème 1 :** Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie

d'une façon explicite  $u_n = f(n)$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

**Exemple :**

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \frac{1}{n} \text{ ? on pose : } \frac{1}{n} = t$$

$$n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \frac{1}{n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

**Théorème 1 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente

vers  $L$  tel que :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) : u_n \geq 0$  Alors :

$$L \geq 0$$

**Théorème 3 :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux

suites convergentes tels que :

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  Alors :  $\lim v_n \leq \lim u_n$

**Preuve :** On pose :  $w_n = u_n - v_n$

**On a :**  $w_n \geq 0$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente

**Donc :**  $\lim w_n \geq 0$  donc :  $\lim u_n - \lim v_n \geq 0$

donc :  $\lim u_n - \lim v_n \geq 0$  donc :  $\lim v_n \leq \lim u_n$

**Remarque :** si  $v_n < u_n$  ( $\forall n > N$ )

On n'a pas obligatoirement  $\lim v_n < \lim u_n$

**Exemple :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites

numériques tels que :  $u_n = 3 - \frac{1}{n}$  et  $v_n = 3 + \frac{1}{n}$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On a :  $u_n < v_n$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$  mais :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

**Théorème 4 :** (critères de divergence 1)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques

tels que :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et

$\lim v_n = +\infty$  on a alors :  $\lim u_n = +\infty$

**Exemple :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) montrer que :  $v_n \geq \frac{4}{3}n^2$   $\forall n \in \mathbb{N}$

2) en déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Solutions :** 1) on a :  $(-1)^n \geq -1$   $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $2(-1)^n \geq -2$  donc  $2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \geq -2 + \frac{4}{3}n^2 + 2$

Donc :  $v_n \geq \frac{4}{3}n^2$   $\forall n \in \mathbb{N}$

2) on a :  $v_n \geq \frac{4}{3}n^2$   $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n^2 = +\infty$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  d'après : Théorème 4

**Exercice 6 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :

$$v_n = 3n + 5 \sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Solutions :** on a :  $\sin n \geq -1$   $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $5 \sin n \geq -5$  donc  $v_n \geq 3n - 5$

on a :  $v_n \geq 3n - 5$   $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 5 = +\infty$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  d'après : Théorème 4

**Théorème 5 :** (critères de divergence 2)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques

tels que :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

on a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

**Exemple :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :

$$v_n = -4n + 3 \cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Solutions :** on a :  $\cos n \leq 1$   $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $3 \cos n \leq 3$  donc  $v_n \leq -4n + 3$

on a :  $v_n \leq -4n + 3$   $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4n + 3 = -\infty$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  d'après : Théorème 5

**Théorème 6 :** (critères de convergence)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques

et  $l$  un réel. tels que :  $|u_n - l| \leq v_n$   $\forall n \geq p$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**Exemple 2 :** soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Solutions :** on a :  $u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$

donc :  $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$  donc :  $|u_n - 3| = \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$

donc :  $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3}$  car :  $|\sin n| \leq 1$

et puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$  alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

**Théorème 7 :** (critères de convergence)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites numériques et  $l$  un réel. Tels que :

$w_n < u_n < v_n$  et  $\forall n \geq p$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

Alors :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**Exemple :** calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

**Solutions :** on a :  $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

**Théorème 8:1)** Toute suite croissante et majorée est convergente.

2) Toute suite décroissante et minorée est convergente

**Exemple1 :** (Exercice déjà corrigé)

soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) On a montré La suite  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

2) On a montré que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 4.

Donc elle est convergente.

**Exemple2 :** soit  $(v_n)_{n \geq 4}$  la suite récurrente

définie par :  $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite  $((v_n)_{n \geq 4}$  est convergente.

**Solutions : 1)**  $v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n}{n+1} - v_n = \frac{4-n}{n+1} v_n$

Et puisque  $v_n > 0 : \forall n \geq 4$  (vérifier le par récurrence)

Alors :  $v_{n+1} - v_n \leq 0 \quad \forall n \geq 4$  Donc :  $((v_n)_{n \geq 4}$  est décroissante

Et puisque :  $v_n > 0 \quad \forall n \geq 4$  alors  $(v_n)_{n \geq 4}$  est

minorée par 0 **Conclusion :**  $(v_n)_{n \geq 4}$  est convergente

**Remarque :** Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone : exemple :

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  : n'est pas monotone mais elle est convergente.

**Exercice7 :** calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2}$       2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$

**Solutions : 1)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} ??$

on a :  $-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $-\frac{1}{n+2} \leq \frac{\cos n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$  donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$  posons :  $u_n = \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$

donc :  $\left| u_n - \frac{3}{4} \right| = \frac{11}{4} \left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right|$  (a vérifier)

et on a :  $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc :

$4n - 1 \leq 4n + \sin \frac{1}{n} \leq 4n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc :  $\frac{1}{4n+1} \leq \frac{1}{4n + \sin \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{4n-1}$

et puisque  $\left| \sin \frac{1}{n} \right| \leq 1$  et  $\left| \frac{1}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{4n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc :  $\left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{4n-1}$  Donc :  $\left| u_n - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{11}{4(4n-1)}$

et puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{4(4n-1)} = 0$  alors ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

**Théorème 9:1)** Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$

2) Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$

**Exemple :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad v_0 = 1$$

montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Solutions :** on a :  $v_{n+1} - v_n = n^4 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

Montrons que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non majorée ?

Supposons que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée

Donc :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un  $l \in \mathbb{R}$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$  et on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = l$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = 0$  or on a :  $v_{n+1} - v_n = n^4$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$  absurde ( $+\infty = 0$ )

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non majorée et croissante

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Exercice8 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = x^2 + x + 1$$

1. Monter que la suite  $(u_n)$  est croissante

2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est non majorée

(Par absurde) .

3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

**6) Suite de la forme :  $v_n = f(u_n)$**

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ; et  $(u_n)$  une suite numérique telle que

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $f$  continue en  $l$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

**Exemple :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Solutions :** on pose :  $u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}$

Donc :  $v_n = f(u_n)$  avec :  $f(x) = \sqrt{x}$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$

Et  $f$  est continue en  $\frac{2}{3}$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

**Exercice9 :** calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$

3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

**Solutions :** 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n + 1}{3n + 4} = \frac{\pi}{3}$  et la fonction  $f$

tel que :  $f(x) = \tan x$  est continue en  $\frac{\pi}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2}{2n^2} = 8$  et la fonction  $f$

tel que :  $f(x) = \sqrt{x}$  est continue en 8

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$$

3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = ?$  on pose :  $t = \frac{1}{n}$

$n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{donc} : \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

et la fonction  $f$  tel que :  $f(x) = \arctan(x)$  est continue en 1

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

**7) limite de Suite de la forme :  $a^n$  et  $n^p$**

**Proposition :**  $a \in \mathbb{R}$

1) a) si  $a > 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si  $-1 < a < 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si  $a \leq -1$  ( $a^n$ ) n'a pas de limites

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  si  $p \in \mathbb{N}^*$

**Preuve : 1) a)  $a > 1 \Leftrightarrow a = 1 + \alpha$  avec  $\alpha > 0$**

Donc :  $a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$  d'après l'inégalité de Bernoulli

Donc :  $a^n \geq n\alpha$  et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha = +\infty$

alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si  $-1 < a < 1$  alors  $|a| < 1$  donc :  $\frac{1}{|a|} > 1$

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = 0$

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si  $a \leq -1$  alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^n = +\infty$  car  $|a| > 1$  mais  $a^n$  change de signe donc ( $a^n$ ) n'a pas de limites

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p$  si  $p \in \mathbb{N}^*$  ?

On a :  $n^p \geq n$  car  $p \in \mathbb{N}^*$  et puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$

**Exemples :** calculer les limites suivantes :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$

**Solutions :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  car  $a = 2 > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  car  $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$(-5)^n$  N'a pas de limites car  $a = -5 < -1$

**Exercice 10 :** calculer les limites suivantes

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

**Solutions :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0$  car  $-1 < a = 0,7 < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$  car  $a = \sqrt{2} > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$  N'a pas de limites car  $a = -2 < -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  car  $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$  car  $a = \frac{5}{4} > 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$  car  $a = 3 > 1$  et  $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

**8) Suite de la forme :  $u_{n+1} = f(u_n)$**

**Activité :** Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de  $C_f$  avec la droite  $(\Delta) y = x$

2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et

$u_{n+1} = f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite  $(u_n)$

b) Conjecturer la monotonie de la suite  $(u_n)$  et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante majorée par 2.

4. Soit la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N} v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(v_n)$  soit géométrique.

b) Déterminer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)$  une suite numérique telle que

a)  $f$  est continue sur  $I$

b)  $f(I) \subset I$

c)  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d)  $u_0 \in I$  ( donc  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$

e)  $(u_n)$  est convergente

Alors la suite  $(u_n)$  tend vers  $l$  solution de l'équation  $f(x) = x$

**Remarque :**

1- Par fois l'équation  $f(x) = x$  admet plusieurs solutions ; Dans ce cas prenez celle qui est dans  $I$ .

S'il y a plusieurs solutions de l'équation  $f(x) = x$  ; utiliser la monotonie de  $(u_n)$

2- La fonction  $f$  et la suite  $(u_n)$  n'ont pas nécessairement la même monotonie :

**Exercice11** : Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$

et  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $I = [0,1]$

et Montrer que  $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Solution :** 1)  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

La fonction  $f$  est croissante et continue sur  $I = [0,1]$  donc :

$$f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \subset [0,1]$$

2) a) montrons que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

- on a :  $0 \leq u_0 \leq 1$  la ppte est vraie pour  $n=0$
- supposons que :  $0 \leq u_n \leq 1$
- montrons que :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  ?

on a :  $0 \leq u_n \leq 1$  donc  $u_n \in I = [0,1]$

donc :  $f(u_n) \in f(I) \subset I$  donc :  $u_{n+1} \in [0,1]$

donc :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

Conclusion :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

2) b)  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \left( \frac{1+u_n}{2} - u_n^2 \right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2} + u_n}}$$

$$\text{On a : } \frac{1+u_n}{2} - u_n^2 = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{2} = \frac{-2(u_n - 1)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{2}$$

Et puisque :  $0 \leq u_n \leq 1$  alors :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc : la suite  $(u_n)$  est croissante

et puisque :  $(u_n)$  majorée par 1 alors :

$(u_n)$  est convergente.

c)  $(u_n)$  est convergente et la limite est solutions de l'équation  $f(x) = x$

$$\text{donc : } l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$$

donc :  $l = 1$  ou  $l = -\frac{1}{2}$  et puisque :  $0 \leq l \leq 1$

donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

**Exercices 12** : Soit la suite  $(u_n)$  définie par :

$u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de  $f$  et déterminer  $f([0,2])$

2. a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Propriété** : Toute suite convergente est bornée

**Remarque** : La réciproque n'est pas vraie :

$u_n = (-1)^n$  est bornée mais pas convergente.

**Exercices 13** : Soit les suites numériques  $(u_n)$

et  $(v_n)$  définies par :  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

$$\text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (v_n > u_n)$

3. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont la même limite.

**Exercice14** : Considérons les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$  avec  $0 < a < b < 2a$

$$u_n v_n = ab \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante
3. a) Montrer  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

**Exemple:** Soit les suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$

$$\text{définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

**Solution :**

1)  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$  donc :  $(u_n)$  est croissante

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{(n^2 + n + 1)}{n(n+1)^3} < 0$$

donc :  $(v_n)$  est décroissante.

2) on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Exercice15:** Soit les suites numériques  $(u_n)$  et

$$(v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

**Solution :**

$$1) u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} > 0$$

donc :  $(u_n)$  est croissante

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$$

donc :  $(v_n)$  est décroissante.

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

**Exercice16:** Soit les suites numériques :  $(x_n)$  et

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ définies par : } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{et}$$

$$u_n = x_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont la même limite.

**Solution :** il suffit de montrer que Les suites  $(u_n)$

et  $(v_n)$  sont adjacentes ???

$$u_{n+1} - u_n = x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} > 0$$

donc :  $(u_n)$  est croissante

$$v_{n+1} - v_n = x_{2n+3} - x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2} < 0$$

donc :  $(v_n)$  est décroissante.

Et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} - x_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$$

alors Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

**Exercice17 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$

$$\text{et } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$

2) on pose :  $\alpha_n = u_{2n+1}$  et  $\beta_n = u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est croissante et que la suite  $(\beta_n)$  est décroissante

b) Montrer que :  $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) Montrer que  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) calculer :  $\lim \alpha_n - \beta_n$

**Solution :** 1)  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc  $f$  est décroissante Sur  $\mathbb{R}^+$

2) on a :  $\alpha_n = u_{2n+1}$  et  $\beta_n = u_{2n}$  et  $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $\alpha_{n+1} = (f \circ f)(\alpha_n)$  et  $\beta_{n+1} = (f \circ f)(\beta_n)$

Et puisque  $f$  est décroissante Sur  $\mathbb{R}^+$  et

$f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$  alors :  $f \circ f$  est croissante Sur  $\mathbb{R}^+$

a) montrons que :  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1} \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• pour  $n=0$  on a :  $\alpha_0 = \frac{1}{2} \leq \alpha_1 = \frac{3}{5}$  et  $\beta_1 = \frac{2}{3} \leq \beta_0 = 1$

• on suppose que :  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1} \leq \beta_n$

• montrons que :  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+2}$  et  $\beta_{n+2} \leq \beta_{n+1}$  ?

on a :  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1} \leq \beta_n$  et puisque  $f \circ f$  est

croissante Sur  $\mathbb{R}^+$  alors :

$(f \circ f)(\alpha_n) \leq (f \circ f)(\alpha_{n+1})$  et  $(f \circ f)(\beta_{n+1}) \leq (f \circ f)(\beta_n)$

Donc :  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+2}$  et  $\beta_{n+2} \leq \beta_{n+1}$

Donc :  $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1} \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc :  $(\alpha_n)$  est croissante et la suite  $(\beta_n)$  est décroissante

b) Montrons que :  $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• pour  $n=0$  on a :  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1 = 1$  donc :  $\alpha_0 \leq \beta_0$

• on suppose que :  $\alpha_n \leq \beta_n$

• montrons que :  $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$  ?

on a :  $\alpha_n \leq \beta_n$  et puisque  $f \circ f$  est croissante Sur

$\mathbb{R}^+$  alors :  $(f \circ f)(\alpha_n) \leq (f \circ f)(\beta_n)$

donc :  $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$  donc :  $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrons que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Puisque :  $\alpha_0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Donc :  $\frac{1}{2} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n} \leq 1$

Donc :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) Montrons que :  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

• pour  $n=1$  on a :  $|u_2 - u_1| = \frac{1}{6}$  donc :  $|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{1}$

• on suppose que :  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

• montrons que :  $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$  ?

on a :  $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left| \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \right|$

$= \frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n|$

Et on a :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$  et  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

Donc :  $\frac{3}{2} \leq 1+u_n \leq 2$  et  $\frac{3}{2} \leq 1+u_{n+1} \leq 2$

Donc :  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}+1} \leq \frac{2}{3}$  et  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{3}$

Donc :  $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \leq \frac{4}{9}$  et  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

Donc :  $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9n}$

Et on a :  $\frac{1}{n+1} - \frac{4}{9n} = \frac{5n-4}{9n(n+1)} > 0$  donc :

$\frac{4}{9n} < \frac{1}{n+1}$

Donc :  $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$

donc :  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) montrons que la suite  $(u_n)$  est convergente

Et déterminons la limite de la suite  $(u_n)$  ??

On a :  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc :  $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc :  $|\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et puisque :  $\lim \frac{1}{2n} = 0$  alors :  $\lim \alpha_n - \beta_n = 0$

**Exercice18 :** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

**Solution :**

On a :  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}} ?$

Soit la fonction  $f$  tel que :  $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

la fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12 \frac{9+x^4-4x^4}{(9+x^4)^2} = 36 \frac{3-x^4}{(9+x^4)^2} = 36 \frac{(\sqrt{3}+x^2)(\sqrt{3}-x^2)}{(9+x^4)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $\sqrt{3} - x^2$

$$\sqrt{3} - x^2 = (\sqrt{\sqrt{3}} - x)(\sqrt{\sqrt{3}} + x)$$

Donc :  $f$  est croissante sur  $\left[-\sqrt{\sqrt{3}}; \sqrt{\sqrt{3}}\right]$

Et  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; -\sqrt{\sqrt{3}}]$  et  $[\sqrt{\sqrt{3}}; +\infty[$

Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$n=1 \quad u_1 = 1 \quad \text{donc : } 1 \leq u_1 \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\text{supposons que : } 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\text{montrons que : } 1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\text{on a : } 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

et puisque :  $f$  est croissante sur  $I = \left[1; \sqrt{\sqrt{3}}\right]$

$$\text{on a : } f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{\sqrt{3}}) \quad \text{donc } \frac{6}{5} \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$$

$$\text{donc : } 1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{\sqrt{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Etudions la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} ?$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{12u_n}{9+u_n^4} - u_n = u_n \left( \frac{12}{9+u_n^4} - 1 \right) = u_n \left( \frac{3-u_n^4}{9+u_n^4} \right)$$

Puisque :  $1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$  donc :

$$0 < u_n \quad \text{et } 3 - u_n^4 \geq 0 \quad \text{et } 9 + u_n^4 > 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante

Déduction de sa convergence et sa limite ?

la suite  $(u_n)$  est croissante et puisque  $(u_n)$

majorée par  $\sqrt{\sqrt{3}}$  alors :  $(u_n)$  est convergente.

Soit :  $\lim u_n = l$  on a donc :  $1 \leq l \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

Soit la fonction  $f$  tel que :  $f(x) = \frac{12x}{9+x^4}$

On donc :

a)  $f$  est continue sur  $I = \left[1; \sqrt{\sqrt{3}}\right]$

b)  $f(I) = f\left(\left[1; \sqrt{\sqrt{3}}\right]\right) = \left[f(1); f(\sqrt{\sqrt{3}})\right]$

$$f(I) = \left[\frac{6}{5}; \sqrt{\sqrt{3}}\right] \subset I$$

c)  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d)  $u_0 \in I$       e)  $(u_n)$  est convergente

Alors la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$  vérifie l'équation :

$$l = f(l) \quad \text{et } l \in I$$

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{12l}{9+l^4} \Leftrightarrow 9+l^4 = 12 \Leftrightarrow l^4 = 3$$

donc :  $l = \sqrt{\sqrt{3}}$  ou  $l = -\sqrt{\sqrt{3}}$  et puisque :  $l \in I$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \sqrt{\sqrt{3}}$$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien