

# Rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe

## I- Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

### 1-Exemple :

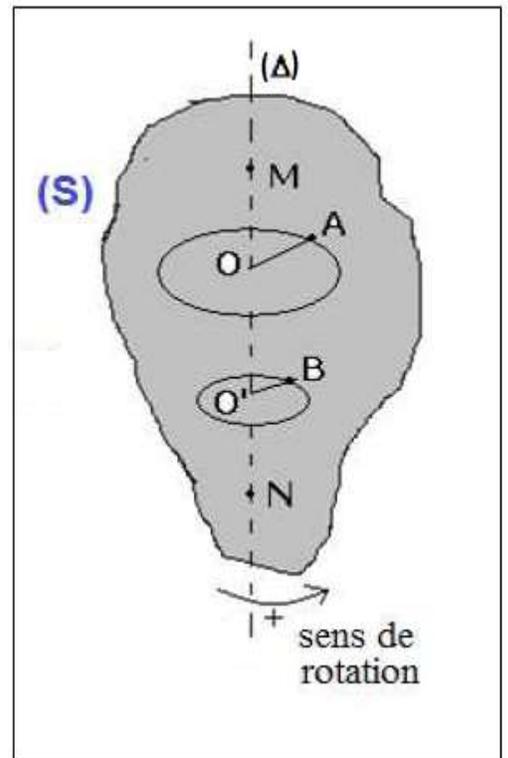
On considère un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ).

- Les deux points A et B décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe ( $\Delta$ ).
- Les deux points M et N situés sur l'axe ( $\Delta$ ) sont immobiles.

### 2- Définition :

Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) si :

Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.



## II- Repérage d'un point du solide :

Soit M un point quelconque choisi sur la trajectoire circulaire. On oriente la trajectoire dans un sens arbitraire. La position du point M est repérée par :

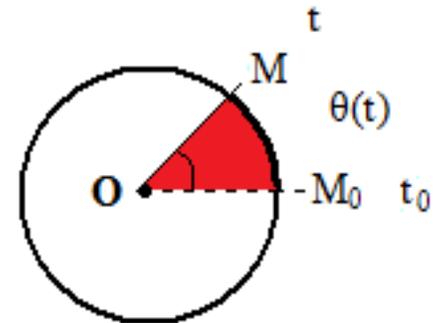
### 1- Abscisse angulaire :

On appelle abscisse angulaire du point M à un instant t la valeur algébrique de l'angle :

$$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$$

L'unité de mesure de l'abscisse angulaire est le radian (rad).

abscisse angulaire (rad)  $\rightarrow \theta = 2\pi \times n \leftarrow$  nombre de tours



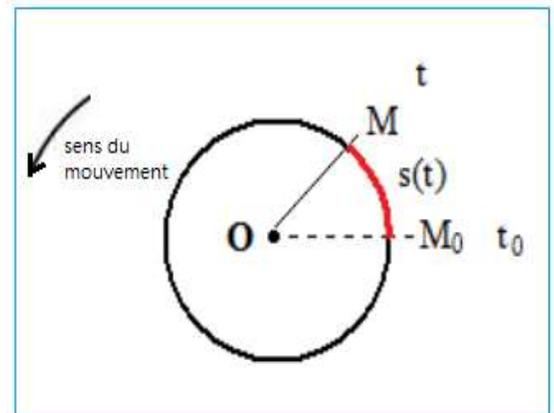
## 2- abscisse curviligne :

On appelle abscisse curviligne du point mobile M à un instant t la valeur algébrique de l'arc :

$$s = \widehat{M_0M}$$

L'unité de mesure de l'abscisse curviligne est le mètre (m).

S est une grandeur algébrique sa signe dépend de l'orientation de la trajectoire.



## 3- La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

L'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire sont proportionnelles :

abscisse curviligne (m)  $\rightarrow s(t) = R \cdot \theta(t) \leftarrow$  abscisse angulaire (rad)

↑  
rayon (m)

## III- Vitesse d'un solide en rotation :

# 1- Vitesse angulaire

## 1.1- Vitesse angulaire moyenne

Lorsqu'un corps est en mouvement autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ). Le point M occupe la position  $M_1$  à l'instant  $t_1$  et la position  $M_2$  à l'instant  $t_2$ , les deux positions étant repérées par des abscisses angulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

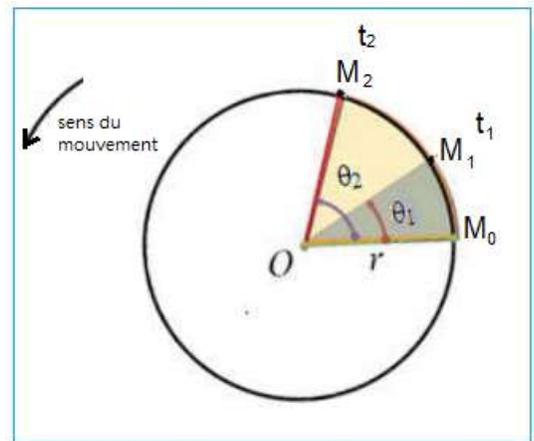
Définition :

La vitesse angulaire moyenne  $\omega_m$  du point M entre  $t_1$  et  $t_2$  est donnée par la relation suivante :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$\Delta\theta$  est l'angle de rotation du solide pendant la durée  $\Delta t$ .

Unité de la vitesse angulaire dans (S I) est le radian par seconde, noté  $rad/s$ .

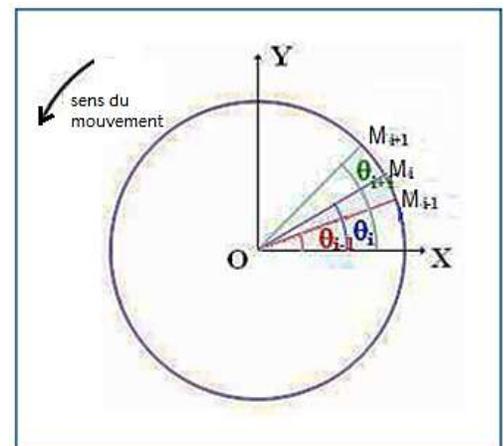


## 2- La vitesse angulaire instantanée :

En considérant  $t_{i-1}$  et  $t_{i+1}$  deux instants très proches et qui encadrent l'instant  $t_i$ .

La vitesse angulaire instantanée à l'instant  $t_i$  est la vitesse angulaire moyenne entre les instants  $t_{i+1}$  et  $t_{i-1}$ .

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$



## 3- Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire :

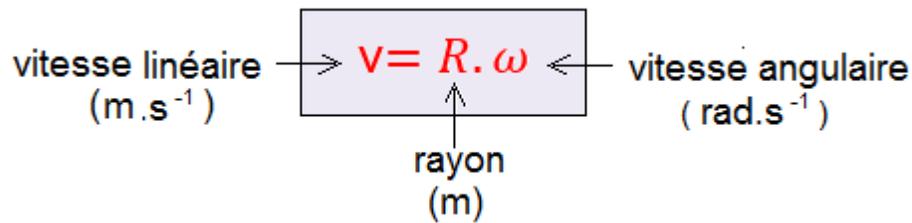
## Vitesse linéaire d'un point du solide

Pendant la durée  $\Delta t = t_2 - t_1$  ; le point M parcourt la distance  $\widehat{M_1M_2}$  la vitesse linéaire s'écrit :

$$v = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

On sait que :  $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$

Donc :  $v = R \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$



## Remarque :

Tous les points du solide ont à chaque instant la même vitesse de rotation, mais ils n'ont pas généralement la même vitesse instantanée.

## IV- Mouvement de rotation uniforme

### 1- Définition :

Le mouvement de rotation d'un solide est dite uniforme si sa vitesse angulaire  $\omega$  reste constante au cours du temps.

### 2- Les propriétés de rotation uniforme

#### 2.1- La période :

La période  $T$  d'un mouvement de rotation uniforme est la durée d'un tour.

On :  $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$  pour un tour  $2\pi = \omega \cdot T$

$$\text{période (s)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \leftarrow \text{vitesse angulaire (rad.s}^{-1}\text{)}$$

avec  $T$  en seconde (s) et  $\omega$  en radian par seconde ( $rad/s$ ).

## 2.2- la fréquence :

La fréquence  $f$  d'un mouvement de rotation uniforme est le nombre de tours par seconde.

$$\text{fréquence (Hz)} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \leftarrow \text{vitesse angulaire (rad.s}^{-1}\text{)}$$

### Remarque :

La vitesse angulaire  $\omega$  peut être exprimée en  $tr.s^{-1}$  ou  $tr.min^{-1}$

avec :

$$\begin{cases} 1tr.min^{-1} = \frac{2\pi}{60}rad.s^{-1} \\ tr.s^{-1} = 2\pi.s^{-1} \end{cases}$$

## V- Equation horaire d'un mouvement de rotation uniforme

$\theta$  et  $\theta_0$  sont des abscisse angulaires, d'un point M du solide, successivement aux instants  $t$  et  $t_0$ .

On écrit :

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\theta = \omega \cdot (t - t_0) + \theta_0$$

Si  $t_0 = 0$  on a :  $\theta = \omega \cdot t + \theta_0$

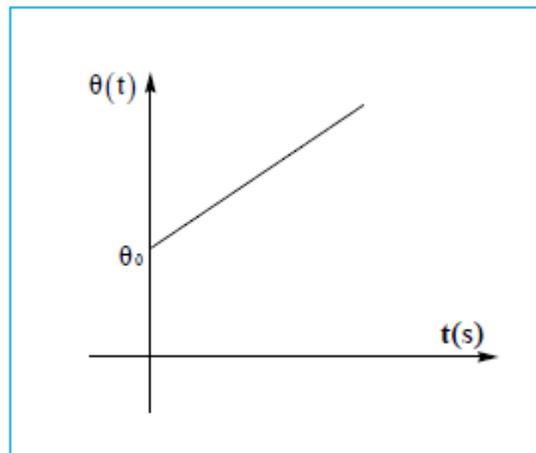
**Activité : (voir fin du cour)**

L'équation horaire d'un mouvement de rotation uniforme en abscisse angulaire :

abscisse angulaire à l'instant  $t$  (rad)  $\rightarrow$   $\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$

abscisse angulaire à  $t=0$  (rad)

vitesse angulaire (rad.s<sup>-1</sup>)



L'équation horaire d'un mouvement de rotation uniforme en abscisse curviligne  $s(t)$  :

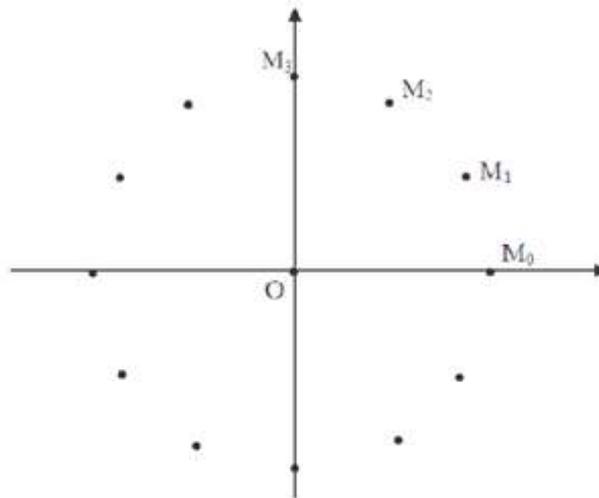
abscisse curviligne à l'instant  $t$  (m)  $\rightarrow$   $s(t) = v \cdot t + s_0$

abscisse curviligne à  $t=0$  (m)

vitesse linéaire (m.s<sup>-1</sup>)

**Activité :**

La figure suivante représente l'enregistrement de mouvement d'un point M située au centre d'un autoporteur en rotation autour d'un axe fixe. (L'autoporteur est lié par un fil à un axe métallique fixé sur une table horizontale). L'intervalle de temps entre deux enregistrements consécutifs est égal à 40 ms.



On considère l'axe Ox passant par  $M_0$  comme direction référentielle. Les position du point M sont déterminées par l'abscisse angulaire  $\theta_i = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_i})$  ou bien par l'abscisse curviligne  $S = (\widehat{M_0M_i})$ . Le moment d'enregistrement de point  $M_2$  correspond à l'origine des temps.

- 1) Montrer que le mouvement de M est circulaire uniforme.
- 2) Compléter le tableau suivant :

	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$	$M_{11}$
$\Theta$ (rad)	0											
S (m)	0											
t(s)			0									

- 3) En utilisant une échelle convenable, tracer les deux courbes  $\theta=f(t)$  et  $s=f(t)$ .
- 4) En déduire les équations horaires du mouvement de point M.
- 5) Déterminer la vitesse angulaire de rotation de l'autoporteur et la vitesse de translation du point M graphiquement et par le calcul.
- 6) Vérifier la relation  $v = r \cdot \omega$ , tel que v est la vitesse de translation,  $\omega$  la vitesse angulaire et r le rayon de la trajectoire.

## Exploitation:

1- Montrons que le mouvement est circulaire et uniforme :

La trajectoire du point M est circulaire, la distance entre deux points consécutifs reste constante donc **le mouvement est circulaire uniforme.**

2- Complétons le tableau :

On prend comme exemple l'abscisse curviligne en position  $M_2$  :

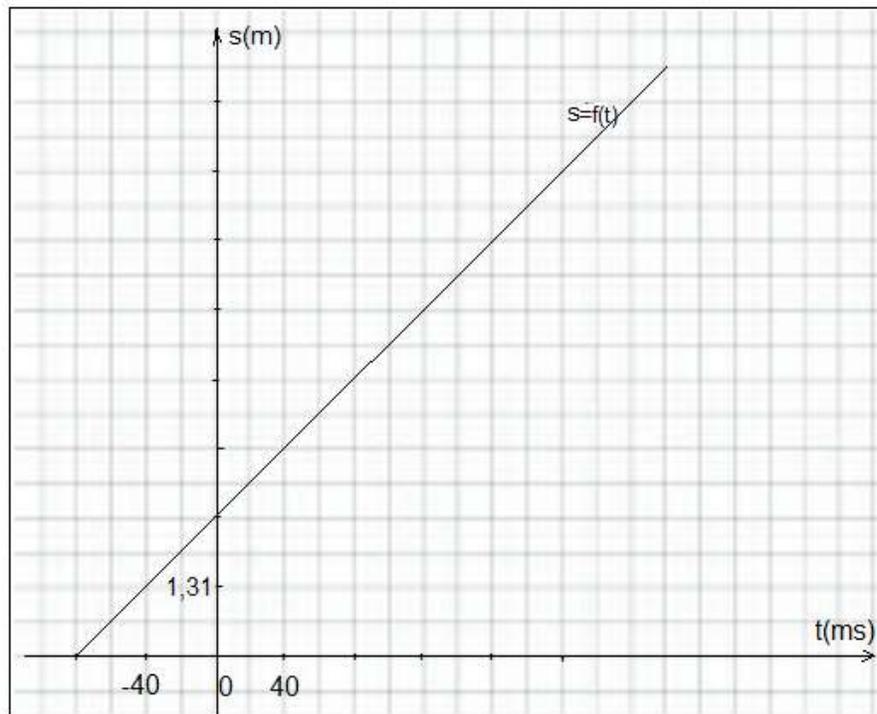
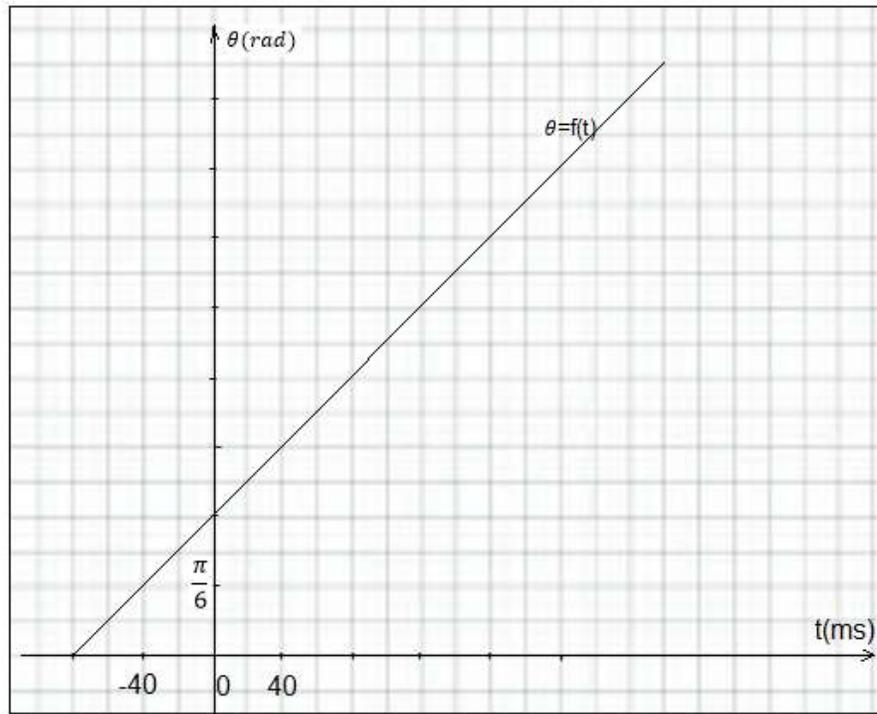
$$s_2 = \widehat{M_0 M_2} = r(\theta_2 - \theta_0)$$

$r$  rayon de la trajectoire

$$s_3 = 2,5 \times \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = 1,62 \text{ cm}$$

Position	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$	$M_{11}$
$t(ms)$	-80	-40	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360
$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$s(cm)$	0	1,31	2,62	3,93	5,24	6,54	7,85	9,16	10,47	11,78	13,09	14,40

3- Les courbes  $\theta = f(t)$  et  $s = f(t)$



#### 4- Les équations horaires du mouvement :

La courbe  $\theta = f(t)$  est une fonction affine son équation s'écrit :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

A  $t=0$  on a :

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ \theta(t=0) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$\omega$  représente le coefficient directeur :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_6 - \theta_3}{t_6 - t_3} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{(160 - 40) \times 10^{-3}} = 13,09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'équation horaire s'écrit :  $\theta = 13,09 t + \frac{\pi}{3}$

De la même façon on obtient l'équation horaire :  $s = v \cdot t + s_0$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_6 - s_3}{t_6 - t_3} = \frac{(7,85 - 3,93) \times 10^{-2}}{(160 - 40) \times 10^3} = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

$$s_0 = R\theta_0 = 2,5 \times 10^{-2} \times \frac{\pi}{3} = 2,62 \cdot 10^{-2} m$$

$$s = 0,33 t + 2,62 \cdot 10^{-2}$$

5- graphiquement :

la vitesse angulaire est le coefficient directeur du graphe =  $f(t)$  , donc :

$$\omega = 13,10 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

la vitesse linéaire est le coefficient directeur du graphe =  $f(t)$  , donc :

$$v = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

-Par calcul :

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{([0 - (-80)] \times 10^3)} = 13,09 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_0}{t_2 - t_0} = \frac{(2,62 - 0) \times 10^{-2}}{[0 - (-80)] \times 10^3} = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

6- Vérification de la relation  $v = R \cdot \omega$  :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{donc : } v = R \cdot \omega$$

$$R \cdot \omega = 2,5 \times 10^{-2} \times 13,09 = 0,33 m \cdot s^{-1}$$

Donc la relation  $v = R \cdot \omega$  est vérifiée.