I. $z=[1,\alpha]=\cos\alpha+i\sin\alpha$ Approche sur l'ensemble des nombres complexes :

a. Activité :

1. On considère l'équation $x\in\mathbb{R} : x^2+1=0$.
Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Qui impose au mathématique d'utiliser le nombre i qui n'est pas réel mais c'est un nombre imaginaire tel que : $i^2=(-i)^2=-1$ par suite l'équation admet 2 solutions i et $-i$ mais dans un autre ensemble appelé ensemble des nombres complexes , noté $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$ et qui ont mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation : $(E): x^2-2x+2=0$.
   - Vérifie que l'équation (E) s'écrit de la forme suivante : $(E):(x-1)^2+1=0$.
   - Vérifie que $1+i$ et $1-i$ sont solutions de (E) .

b. Vocabulaire et notation :

- Les nombres $1+i$ et $1-i$ sont appelés nombres complexes .
- En général : un nombre complexe est écrit de la forme $z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
- Le nombre complexe : $z'=a-bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ est appelé le nombre complexe conjugué de z noté $\bar{z}$ d'où $\bar{z}=a-bi$
  Exemple : $z=2+5i$ et $z'=-7-3i \Rightarrow \bar{z}=\overline{2+5i}=2-5i$ et $\bar{z'}=\overline{-7-3i}=-7+3i$
- L'écriture $z=a+bi$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ est appelée l'écriture (ou la forme) algébrique de z.
- Le réel a est appelé la partie réelle et on note $\text{Re}(z)=a$. Exemple : $\text{Re}(2+3i)=2$.
- Le réel b est appelé la partie imaginaire et on note $\text{Im}(z)=b$. Exemple : $\text{Im}(2+3i)=3$.

c. Définition :

- Un nombre complexe est un nombre tel que son écriture est de la forme $z=a+bi$ avec a et b de $\mathbb{R}$, i est un nombre imaginaire avec $i^2=-1$.
- Les nombres complexes constituent un ensemble est appelé ensemble des nombres complexes , on note $\mathbb{C}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$v et qui ont mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (commutativité – associativité ….).
- $a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow (a=a' \text{ et } b=b')$.

II. Operations dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

a. Operations :

$z=x+yi$ et $z'=x'+y'i$ de $\mathbb{C}$ avec x et y et x' et y' de $\mathbb{R}$. on a :

❖ Addition dans $\mathbb{C}$: $z+z'=x+yi+x'+y'i=(x+x')+(y+y')i$. $x,y;x'$ et $y'\in\mathbb{R}$

❖ Multiplication dans $\mathbb{C}$: $z\times z'=(x+yi)\times(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+yx')i$.

cas particulier $k\in\mathbb{R}$: $k.z=k.(x+yi)=kx+kyi$.

❖ L'inverse de $z=a+bi\neq 0\left((a,b)\neq(0,0)\right)$: $\frac{1}{z'}=\frac{1}{x'+y'i}=\frac{1\times\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=\frac{1\times(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}=\frac{x'}{x'^2+y'^2}-\frac{y'}{x'^2+y'^2}i$

❖ Le quotient de z par z' : $\frac{z}{z'}=\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\frac{1}{z'\times\overline{z'}}\times z\times\overline{z'}$

$$=\frac{1}{x'^2+y'^2}\times(x+yi)(x'-y'i)=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}i$$

b. Applications :

❖ $z+z'=1+5i+2-3i=3+2i$.

❖ $z\times z'=(1+5i)\times(2-3i)$

$=1\times2+5i\times(-3i)+(1\times(-3)+5\times2)i$

$=17+7i$

❖ $-3\times z=-3\times(1+5i)=-3-15i$ et $(2+3i)\times\overline{(2+3i)}=2^2+3^2=13$.

❖ $\frac{1}{z'}=\frac{1}{2-3i}$

$=\frac{2+3i}{(2-3i)\times(2+3i)}$

$=\frac{2}{2^2+3^2}+\frac{3}{2^2+3^2}i$

$=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

❖ $\frac{z}{z'}=\frac{1+5i}{2-3i}$

$=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$

$=\frac{1\times2+5i\times3i}{2^2+3^2}+\frac{5i\times2+1\times3i}{2^2+3^2}$

$=\frac{-13}{13}+\frac{13}{13}i$

$=-1+i$

❖ $z_1=2+5i-(-4+2i)=2+4+(5-2)=6+3i$

❖ $z_2=2+5i-3i(-4+2i)=2+5i+12i+6=8+17i$.

❖ $z_3=(2+5i)(-4+2i)=2\times(-4)+5i\times2i+\left(2\times2+5\times(-4)\right)i=-18-16i$.

❖ $z_4=\frac{1}{1+3i}=\frac{1\times(1-3i)}{(1+3i)\times(1-3i)}=\frac{1-3i}{1^2+3^2}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$.

❖ $z_5 = \dfrac{2+3i}{5-i} = \dfrac{(2+3i)\times(5+i)}{(5-i)\times(5+i)} = \dfrac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2} = \dfrac{7+17i}{26} = \dfrac{7}{26} + \dfrac{17}{26}i$

c. Remarque :

❖ $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$.

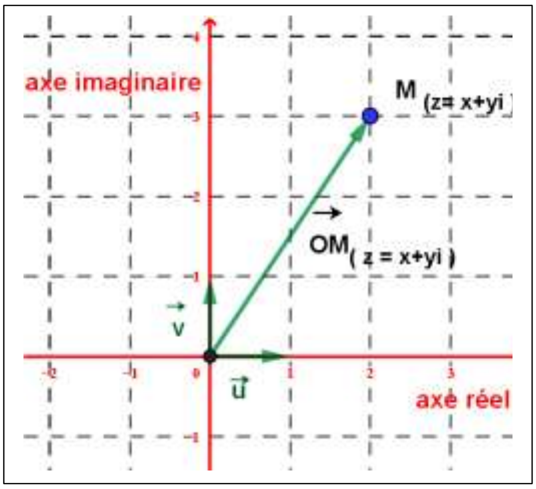
❖ $(a-bi)^2 = a^2 - 2abi + (-bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2$.

❖ $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

III. Présentation géométrique d'un nombre complexe :

a. Activité :

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.



• A tout nombre complexe $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M(x,y)$ de (P) càd :

$f : \quad \mathbb{C} \to (P)$

$z = x+yi \mapsto f(z) = f(x+yi) = M(x,y)$ (ou bien $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$)

❖ Dans ce cas :

- Le plan (P) est appelé le plan complexe .
- le point $M(x,y)$ est l'image du complexe $z = x + yi$.
- on note $M_{(z)}$ ou $M_{(x+yi)}$ on lit le point M d'affixe z .
  de même pour le vecteur $\overrightarrow{OM}_{(z)}$.
- on note aussi z_M on lit z est l'affixe de M . de même pour $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- Si $z = a \in \mathbb{R}$ alors M est sur l'axe des abscisses sera nommé axe réel .
- Si $z = bi$, $(b \in \mathbb{R})$ alors M est sur l'axe des ordonnés sera nommé axe imaginaire .

b. Propriétés des affixes :

$A(z_A)$; $B(z_A)$; $C(z_C)$ et $I(z_I)$ sont trois points du plan complexe (P) .

❖ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

❖ Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k(z_B - z_A)$.

❖ Le point I milieu de $[A,B]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

❖ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; $(k \in \mathbb{R})$ càd $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ ou bien $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ d'où les points A et B et C sont alignés (avec $z_B - z_A \neq 0$)

c. Application :

On considère $C(z_C = 5 + xi)$; $B(z_B = -2 + i)$; $A(z_A = 2 + i)$ et $I(z_I)$ quatre points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer z_I affixe du point I milieu du segment $[AB]$.
3. Déterminer k tel que A et B et C sont alignés .

Correction :

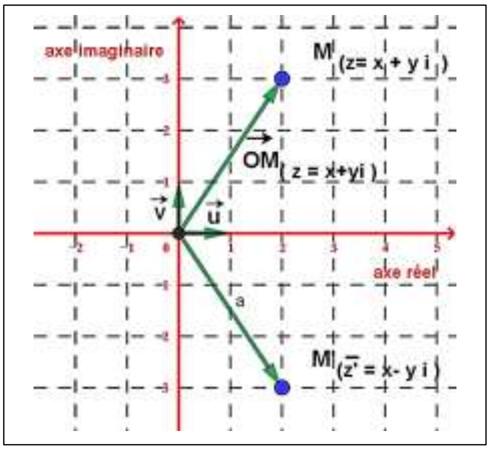
1. ..
2. ..
3. ..

IV. Conjugué d'un nombre complexe $z = x + yi$:

a. Définition :

Le nombre complexe $z' = x - yi$ est appelé le conjugué du nombre complexe $z = x + yi$ on note $z' = \bar{z} = x - yi$.

b. Interprétation géométrique :



c. Applications :

- $z = 1 + 5i$ on a : $\bar{z} = \overline{1 + 5i} = 1 - 5i$.
- $z = -1 - 3i$ on a : $\bar{z} = \overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$.
- $z = 1$ on a : $\bar{z} = \bar{1} = 1$.
- $z = 2i$ on a : $\bar{z} = \overline{2i} = -2i$.
- $z = -6i$ on a : $\bar{z} = \overline{-6i} = 6i$.

d. Propriétés :

Soients : $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de complexes de $\mathbb{C}$ avec x , y , x' et y' de $\mathbb{R}$ on a :

- $z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2yi = 2\mathrm{Im}(z)i$.
- $\bar{\bar{z}} = z$ et $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ et $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

• $(z'\neq 0)$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{z^p}=\left(\overline{z}\right)^p$; $p\in\mathbb{Z}$ (avec $z\neq 0$ si $p\in\mathbb{Z}^-$) .

e. Application :

- $\overline{\overline{2+3i}}=2+3i$.
- $\overline{(2+3i)+1-2i}=\overline{2+3i}+\overline{1-2i}=2-3i+1+2i=3-i$.
- $\overline{(2+3i)\times(1-5i)}=\overline{2+3i}\times\overline{1-5i}=(2-3i)(1+5i)$.
- $\overline{\left(\frac{1}{1-5i}\right)}=\frac{1}{\overline{1-5i}}\frac{1}{1+5i}$.
- $\overline{\left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)}=\frac{\overline{2+3i}}{\overline{1-5i}}=\frac{2-3i}{1+5i}$.
- $\overline{(2+3i)^n}=(2-3i)^n$.

f. Remarque :

- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$ (c.à.d. z est un réel pur) .
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$ (c.à.d. z est un imaginaire pur) .

V. Module d'un nombre complexe $z=x+yi$:

a. Activité :

$M_{(z=x+yi)}$ est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

1. Calculer : $z\times\overline{z}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.
3. Calculer : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, que peut-on déduire ?

b. Définition :

Soit $z=x+yi$ de $\mathbb{C}$ avec x et y de $\mathbb{R}$.

Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ s'appelle le module de z sera noté .$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

c. Application :

- $|5|=|5+0i|=\sqrt{5^2+0^2}=5$ et $|-7|=|-7+0i|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$.
- $|2i|=|0+2i|=\sqrt{0^2+2^2}=2$ et $|-2i|=|0-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$.
- $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

d. Interprétation géométrique du module de z :

On a : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ avec M d'affixe $z=x+yi$ .D'où : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB=|z_B-z_A|$.

e. Remarque :

Soient $z_A = x_A + y_A i$ et $z_B = x_B + y_B i$ et $z_C = x_C + y_C i$ les affixes des points A et B et C avec $z_A \neq z_C$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$ donc si on a $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A .

f. Application :

Soient $A(z_A = 1+i)$; $B(z_A = -1+i)$ et $C(z_C = 3i)$ trois points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC .
2. En déduit la nature du triangle ABC .

Correction :

1. les longueurs des côtés du triangle ABC :

on a ;

- $AB = |z_B - z_A| = |-1+i-(1+i)| = |-2| = 2$.
- $AC = |z_C - z_A| = |3i-(1+i)| = |-1+2i| = \sqrt{5}$.
- $CB = |z_B - z_C| = |-1+i-(3i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

2. la nature du triangle ABC :

on a : $CB = AC = 2$ d'où : le triangle ABC est isocèle en C.

g. Propriétés du module d'un nombre complexe :

$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert = \lvert -\bar{z}\rvert$	$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$\left\lvert\frac{1}{z'}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z'\rvert}$; $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ $(z' \neq 0)$	$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^p\rvert = \lvert z\rvert^p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$

h. Application :

- $|1+i| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$ et $|(1-i)\times(2+3i)| = |1-i| \times |2+3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$.
- $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left|(1+i)^6\right| = |1+i|^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$ et $|-i+i| \leq |-i| + |i| \Leftrightarrow 0 \leq 1+1$.

i. Exercice :

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5+3i$ et $z_2 = 4i(-2+3i)$ et $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$.
- $z_5 = \frac{7}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_6 = \frac{4(1+i)}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)}$ et $z_7 = \frac{4(1+i)^2}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)^6}$.

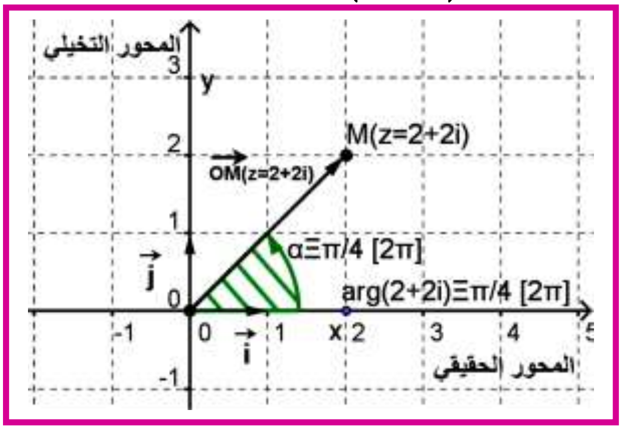
VI. Argument d'un nombre complexe non nul $z = x + yi$:

a. Activité :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. $M_{(z)}$ avec $z = 2+2i$

1. Construire le point M dans le plan complexe (P) .

2. Donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, puis toute les mesures .



b. Vocabulaire :

- $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, on l'appelle aussi argument du nombre complexe $z = 2+2i$
- Aussi toute mesure parmi les mesures $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ est appelé aussi argument du nombre complexe non nul $z = 2+2i$.
- Argument du nombre complexe non nul $z = 2+2i$ est noté $\arg(z) \equiv \overline{(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ ou

$\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

- En général si $z \in \mathbb{C}^*$ et $\overline{(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM})} \equiv \alpha\ [2\pi]$ on écrit $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou encore

$\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

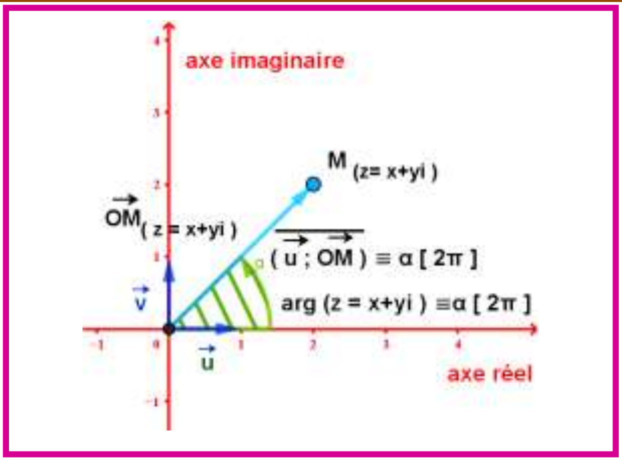
- On préfère de prendre $\alpha \in]-\pi,\pi]$ (c.à.d. la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ avec $M \neq O$.
- Le nombre complexe non nul $z = 0$ n'a pas d'argument ($\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ d'où l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ n'est pas déterminé) .

c. Définition :

$M_{(z)}$ ($M_{(z)} \neq O$ donc $z \neq 0$) est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

Toute mesure α de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ s'appelle argument du nombre complexe non nul z .

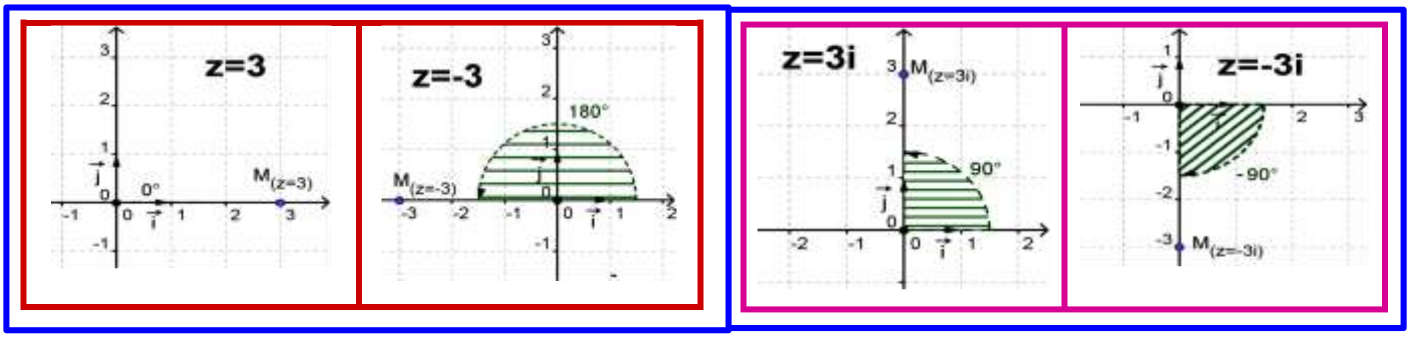
On note : $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$; d'où $\arg(z) \equiv \overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$



d. Remarque :

- $z = a > 0$ alors $\arg(a) \equiv 0\ [2\pi]$ et $z = a < 0$ alors $\arg(a) \equiv \pi\ [2\pi]$.
- $z = bi$; $b > 0$ alors $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $z = bi$; $b < 0$ alors $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$ (sans oublier $z \neq 0$) .

e. Exemples :



f. Exercice :

1. Dans le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ construire les points suivants : $M_{1(z_1=2)}$ et $M_{2(z_2=-3)}$ et $M_{3(z_3=2i)}$ et $M_{4(z_4=-3i)}$ et $M_{5(z_5=1+i)}$ et $M_{6(z_6=1-i)}$ et $M_{7(z_7=2+2i)}$ et $M_{8(z_8=-1-i)}$.
2. En déduit les arguments des affixes des points précédents .

g. Propriétés des arguments :

z et z' deux complexes non nuls	
$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$	$p \in \mathbb{Z}$; $\arg(z^p) \equiv p \times \arg z\ [2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z'\ [2\pi]$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$
Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$	Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

h. Application :

Argument des nombres complexes suivants : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 4i(1+i)$ et $z_3 = (1-i)$ et $z_4 = (1-i)(1+i)^8$

- $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $\arg(4i(1+i)) \equiv \arg(4i) + \arg(1+i)\ [2\pi]$ et $\arg(1-i) \equiv \arg(\overline{1+i})\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \qquad \equiv -\arg(1+i)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \qquad \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

- $\arg(4i(1+i)) \equiv \arg(4i) + \arg(1+i)\ [2\pi]$ et $\arg\left((1-i)(1+i)^8\right) \equiv \arg(1-i) + \arg(1+i)^8\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} + 8\arg(1+i)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} + 8\times\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

VII. écriture trigonométrique (forme trigonométrique) D'un nombre complexe non nul :

a. activité :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

- On considère un nombre complexe non nul z et le point M d'affixe z (donc $M \neq O$).
- On pose $\arg(z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$.
- $(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique lié au repère $(0,\vec{u},\vec{v})$ coupe la demi droite $[O,M)$ au point M_0 de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ donc l'affixe de M_0 est $z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
- On a les points O et M_0 et M sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_0}$ ont meme sens d'où $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM_0}$ avec $k > 0$ (car $M \neq O$).
- Affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $z = x + yi$ et du vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est $z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$.
- Puis que : $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM_0}$ avec $k > 0$ (car $M \neq O$) donc $z = kz_0 \Leftrightarrow x + yi = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ (1) .
- On détermine k : on a $z = kz_0$ d'où : $|z| = |kz_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = |k||z_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = |k| = k$.
- On obtient : $(2) : k = \sqrt{x^2+y^2}$.
- D'après (1) et (2) on obtient la relation $z = x + yi = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

b. Vocabulaire :

L'écriture : $(3) : z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ s'appelle la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z = x + yi$.

c. Définition et propriété :

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et $r = |z|$.

- Le nombre complexe non nul z s'écrit de la forme suivante : $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ou $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ou $z = [\ |z|\ , \arg(z)] = [r, \alpha]$.

Chaque écriture précédente est appelé la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z = x + yi$.

d. Application :

On donne la forme (ou l'écriture) trigonométrique :

- $z_1 = 2 = 2(1 + 0i) = 2(\cos 0 + \sin 0) = [2, 0]$. $z_2 = -5 = 5(-1 + 0i) = 5(\cos\pi + \sin\pi) = [2, \pi]$.
- $z_3 = 7i = 7(0 + i) = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \left[7, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $z_4 = -\frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(0 - i) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{5}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- $z_5 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

e. Remarque :

- $z = a > 0$ alors $z = [a, 0]$, $z = a < 0$ alors $z = [-a, \pi]$.
- $z = bi\ ;\ b > 0$ alors $\left[b, \frac{\pi}{2}\right]$, $z = bi\ ;\ b < 0$ alors $\left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- Si $z = [r, \alpha]$ alors $-z = [r, \pi + \alpha]$ et $\bar{z} = [r, -\alpha]$ et $-\bar{z} = [r, \pi - \alpha]$.

f. Application :

- **exemple :** $z = 3 = [3, 0]$ et $z = -3 = [3, \pi]$. $z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$ et $z = -3i = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- **exemple :** on a : $z = 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $\bar{z} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $-z = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- cas particulier : $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $z_3 = 1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z_4 = 1 - i\sqrt{3} = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$.

VIII. Operations sur les formes trigonométriques :

a. Activité :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$z = [r, \alpha] = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z' = [r', \alpha'] = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$.

- Le produit de $z \times z'$:

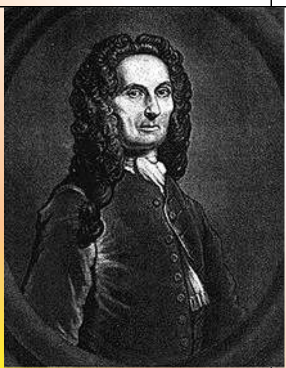
On a :

$$\begin{aligned} z\times z' &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha') \\ &= rr'(\cos\alpha\times\cos\alpha' + \cos\alpha\times i\sin\alpha' + i\sin\alpha\times\cos\alpha' + i\sin\alpha\times i\sin\alpha') \\ &= rr'(\cos\alpha\times\cos\alpha' - \sin\alpha\times\sin\alpha' + i(\cos\alpha\times\sin\alpha' + \sin\alpha\times\cos\alpha')) \\ &= rr'(\cos(\alpha+\alpha') + i\cos(\alpha+\alpha')) \\ &= [rr', \alpha+\alpha'] \end{aligned}$$

b. Propriété :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ et $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$ on a :

Les opérations	$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$
Produit : $z\times z'$	$z\times z'=[r,\alpha]\times[r',\alpha']=[r\times r',\alpha\times\alpha']$ **ou** $zz'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$ $=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
Produit : $\underbrace{z\times z\times\cdots z}_{n\text{ fois}}=z^n$ **Formule de MOIVRE**	$z^n=[r,\alpha]^n=[r^n,n\alpha]$ $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ **Cas particulier $r=1$:** $[1,\alpha]^n=[1^n,n\alpha]=[1,n\alpha]$ **ou encore** $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ **formule de MOIVRE**
 Abraham de Moivre en 1736	Données clés 26 mai 1667 Vitry-le-François (France) 27 novembre 1754 (à 87 ans) Londres (Angleterre) Angleterre Français Mathématiques *Royal Society* Académie de Saumur Formule de Stirling Théorème de Moivre-Laplace - Formule de Moivre
Inverse	$\frac{1}{z'}=\frac{1}{[r',\alpha']}=[r',-\alpha']$ **ou** $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{1}{r'}(\cos(-\alpha')+i\sin(-\alpha'))$
Quotient	$\frac{z}{z'}=\frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$ **ou** $\frac{z}{z'}=\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$

c. Remarque :

Si $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ alors :

- $-z=-1\times z=[1,\pi][r,\alpha]=[r,\alpha+\pi]=r\left(\left(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)\right)\right)$.
- $\bar{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$.