# I. Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés :

## 01. Trièdre :

**a. Définition :**

$[OI)$ et $[OJ)$ et $[OK)$ trois demi-droites non coplanaires de l'espace $(\mathcal{E})$ constituent dans cet ordre un trièdre on note $(OI,OJ,OK)$ chaque demi-droite est appelée cote de trièdre .

**b. Exemple :**

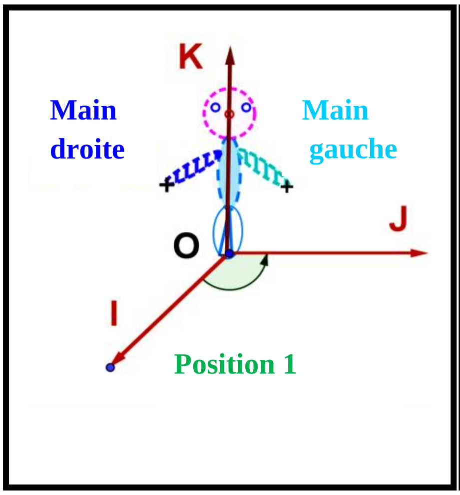
## 02. Bonhomme d'Ampère :

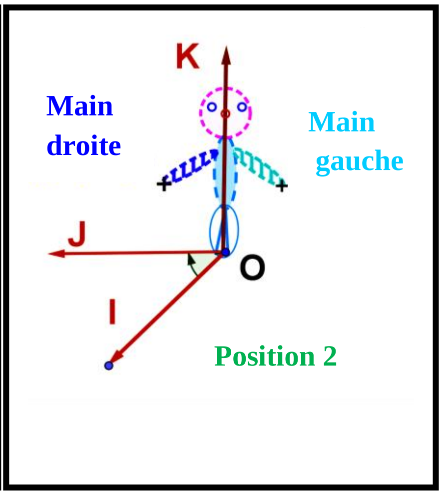
**a. Approche :**

$(OI,OJ,OK)$ est trièdre , on considère une personne virtuel ( ou imaginaire ) tel que :

- ses pieds se trouvent en $O$ debout dans le sens de $[OK)$ .
- il regarde le cote $[OI)$ .
- on s'intéresse de la main gauche suit le cote $[OJ)$ si oui ou non .

cet personne est appelé Bonhomme d'Ampère
donc on a deux positions pour cet personne ( voir les positions ) .



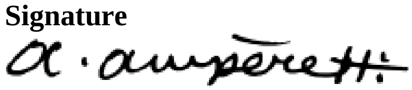




Gravure de 1825 par Ambroise Tardieu.

Données clés

| | |
|---|---|
| Naissance | 20 janvier 1775<br>Lyon (France) |
| Décès | 10 juin 1836 (à 61 ans)<br>Marseille (France) |
| Nationalité |  Française |
| Champs | Mathématiques, physique |
| Institutions | École polytechnique<br>Collège de France |
| Renommé pour | Théorème d'Ampère |

Signature



## 03. Base et repère orientés :

**a. Vocabulaire :**

- La position du bonhomme d'ampère tel que :

ses pieds se trouvent en $O$ debout dans le sens de $[OK)$ et il regarde le cote $[OI)$ et la main gauche suit le cote $[OJ)$ ; le trièdre $(OI,OJ,OK)$ est appelé trièdre directe ou positif ( cette position nous intéresse dans notre leçon ) l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative .

- On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ d'où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires .
- triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base directe si le trièdre $(OI,OJ,OK)$ est direct.
- Le quadruplet $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère direct dans ce cas on dit l'espace est orienté une orientation directe ou positive .

# II. Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté :

## 01. Définition géométrique du produit vectoriel :

### a. Définition :

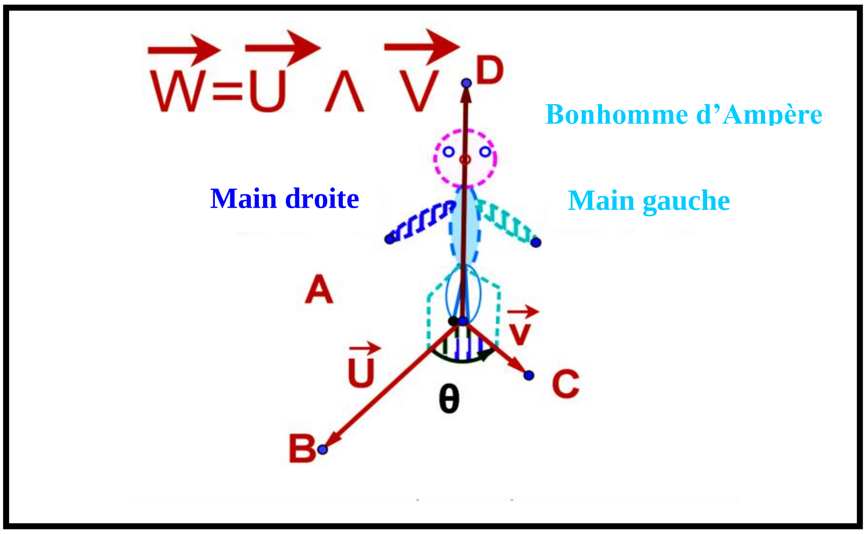
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ orienté .

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ( dans cet ordre ) est le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ , on note $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui vérifie :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ .
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se sont pas colinéaires alors :
   - $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ( c.à.d. $\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ )
   - $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ est une base directe ou encore $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est une base directe ou encore $\left(AB,AC,AD\right)$ est un trièdre direct .
   - La norme de $\vec{w}$ est $\left\|\vec{w}\right\|=\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta$ , $\theta$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ .

### b. Exemple :

**Exemple 1 :**




**Exemple 2 :**

On pose : $\left\|\vec{u}\right\|=2$ et $\left\|\vec{v}\right\|=5$ et $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{6}$ calculer $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$

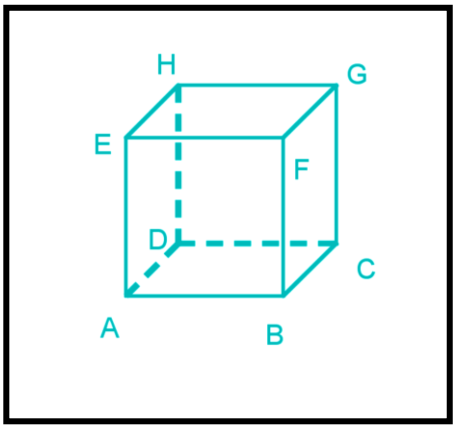
On a :

$$\begin{aligned}\left\|\vec{w}\right\|=\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|&=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta\\&=2\times5\times\sin\frac{\pi}{6}\\&=5\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=5$

**Exemple 3 :**

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre , tel que $AB=1$.



1. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ .
2. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ .

Correction :

1. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

- On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires .
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=1\times1\times\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$ .

2. On détermine : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$

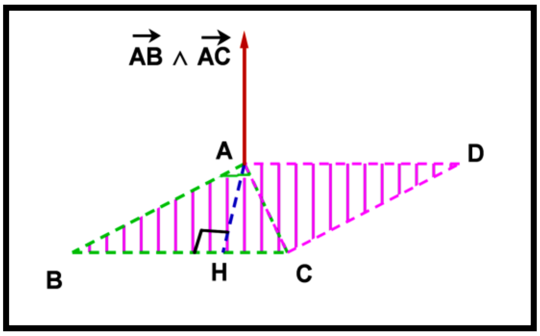
- On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires .
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=2\times2\times\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AE}$.

c. Conséquences :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté .

1. $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ et $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux $(\vec{u}\perp\vec{v})$ le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base orthogonale directe .
3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux $(\vec{u}\perp\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base orthonormée directe .
4. Le plan passant par le point $A$ a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ( c.à.d. $P(A,\vec{u},\vec{v})$ ) alors le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal à ce plan d'où : $P(A,\vec{u},\vec{v})=P(A,\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v})$ .
5. $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow(\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $)$ .

## 02. Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs :




a. Propriété :

- La surface du triangle $ABC$ est $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ .
- La surface du parallélogramme $ABC$ est $S_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ .

## 03. L'antisymétrie et la linéarité du produit vectoriel :

**a. Propriété :**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. L'antisymétrie du produit vectoriel : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

2. Bilinéarité du produit vectoriel : $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$

## III. Les coordonnées $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de l'espace rapporté à une base orthonormée directe :

**a. Propriété :**

l'espace rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

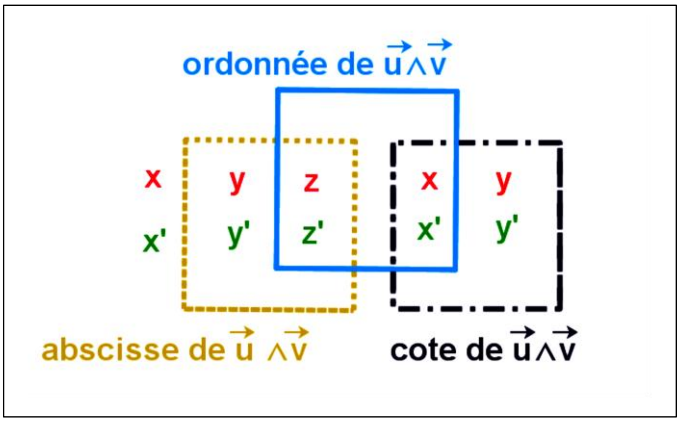
$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}$$

**b. Exemple :**

- On a : $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ ; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ ; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
- $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

**c. Technique :**



## IV. Distance d'un point à une droite de l'espace :

### a. Propriété :

$D(A,\vec{u})$ est une droite passant par le point $A$ et est dirigé par un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'espace .

$M$ est un point de l'espace ; la distance du point $A$ à la droite $D(A,\vec{u})$ est : $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

### b. Exemple :

Calculons la distance du point $M(1,3,0)$ à la droite $(D)$ définie par :

1. la présentation paramétrique suivante $(D):\begin{cases} x=2t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$ ;$t\in\mathbb{R}$ .

2. Système d'équations cartésiennes suivante $(D):\dfrac{x+1}{3}=y=\dfrac{1-z}{2}$ .

**Correction :**

1. Calculons la distance $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

On a : la droite $D(A(0,3,-1),\vec{u}(2,-1,1))$ donc

$\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1-0\\3-3\\0+1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ donc $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{3}$

D'où : $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Calculons la distance $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

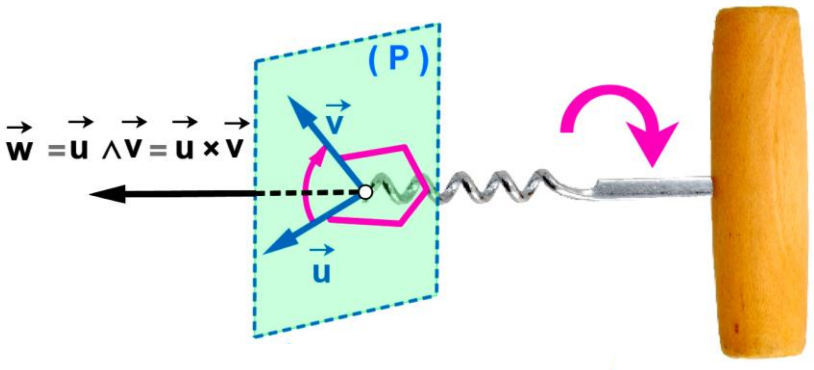
On a : la droite $D(A(-1,0,1),\vec{u}(3,1,-2))$ donc

$\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}1+1\\3-0\\0-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ donc $\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{75}$

D'où : $d(M;D(A,\vec{u}))=\dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{1050}}{14}$.

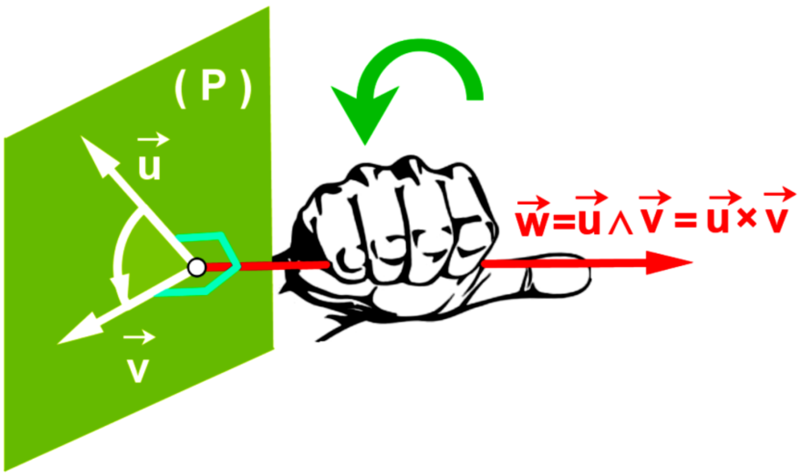
**Produit vectoriel on utilise :**

**règle ≪ de tire bouchon ≫**




règle de "tire bouchon "

**"règle de la main droite "**




règle de " la main droite "

**Bonhomme d'Ampère**