LA ROTATION DANS LE PLAN

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

1) La symétrie axiale.

Définition

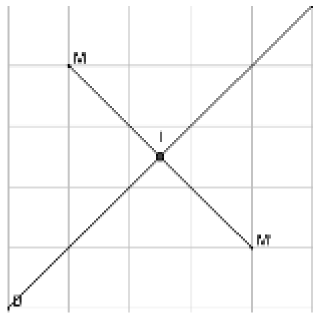
Soit (D) une droite donnée. On dit que le point M' est le symétrique du point M par rapport à (D) si :

- $M' = M$ si $M \in (D)$
- (D) est la médiatrice du segment $[MM']$, si $M \notin (D)$.

  La relation qui lie le point M à M' s'appelle **la symétrie axiale d'axe (D) ;** se notre par $S_{(D)}$.

  On écrit : $S_{(D)}(M) = M'$.

Remarques :



- Si $M \notin (D)$ alors $M' = S_{(D)}(M) \neq M$ et (D) est la médiatrice du segment $[MM']$

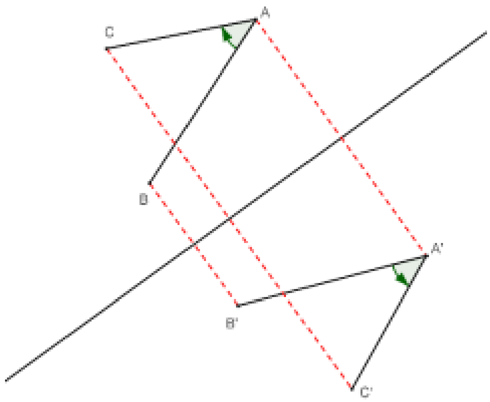
  c'est-à-dire passe par I milieu de $[MM']$ et perpendiculaire à (MM').
- Si $N \in (D)$ alors $S_{(D)}(N) = N$ on dit que N est invariant par $S_{(D)}$
- Inversement si un point N est invariant par $S_{(D)}$ alors $N \in (D)$

Propriétés :

La symétrie axiale conserve :

- Les distances : si $M' = S_{(D)}(M)$ et $N' = S_{(D)}(N)$ alors $MN = M'N'$
- Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.
- les mesures des angles **géométriques**
- Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) \quad [2\pi]$



Propriété :

La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

Preuve :

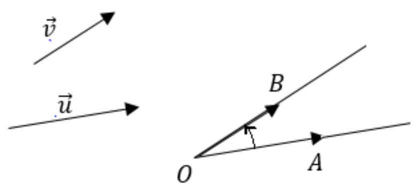
$$S_{(\Delta)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M') = M$$

2) Les angles orientés

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; et soient A et B deux points du plan orienté tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

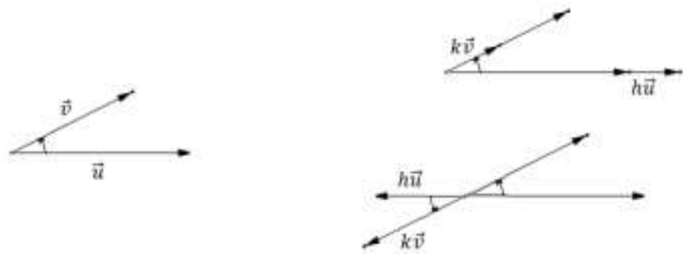
l'angle orienté des demis droites $[OA)$; $[OB)$ s'appelle aussi angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on le note par : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est la mesure de l'angle orienté $(\widehat{[OA),[OB)})$ et se note par $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.



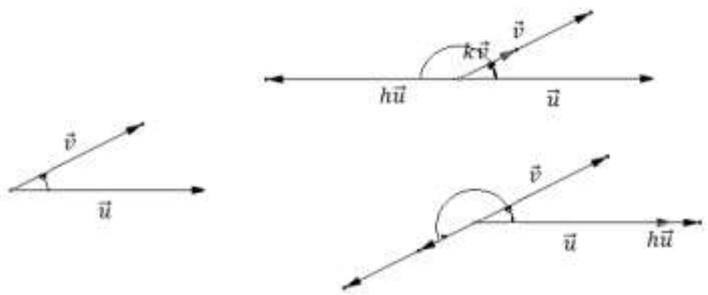
Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et h et k deux réels non nuls ; on a :

- $(\overline{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$
- si $hk > 0$ alors : $\left(\overline{h\vec{u},k\vec{v}}\right) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$



- si $hk < 0$ alors : $\left(\overline{h\vec{u},k\vec{v}}\right) \equiv \pi + (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

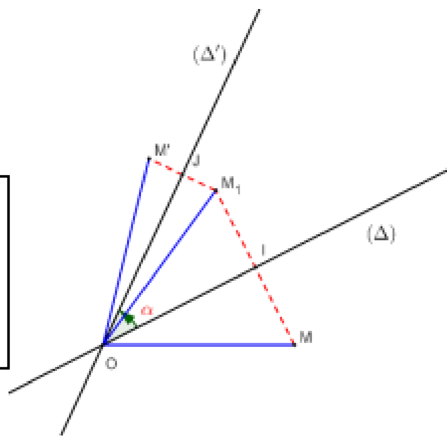


Propriété :

Soient (D) et (Δ) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

et qui se coupent en A, soient B un point de (D) et C un point de (Δ).

On a : $2\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$



Preuve :

D'après la propriété précédente : On a $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

ou $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pi + (\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

et dans les deux cas : $2\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ $[2\pi]$

II) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

1.1 Composition de deux symétries axiales

Activité :

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$ et

$M' = S_{(\Delta')}(M_1)$ et soit $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ')

1- Quelle est l'application qui transforme M en M'.

2- Montrer que $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout M dans le plan la mesure : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$ est constante.

Propriété :

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O ; $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') soit $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ').

L'application $S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}$ transforme le point M en M' tel que : $\boldsymbol{OM = OM'}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \boldsymbol{2\alpha}\ [\boldsymbol{2\pi}]$

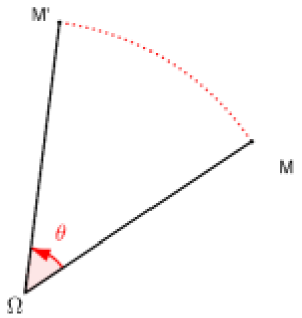
L'application $\left(S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}\right)$ s'appelle **la rotation de centre O et d'angle 2α**

1.2 Définition de la rotation.

Définition :

Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

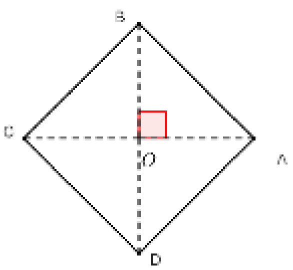
$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega M = \Omega M'} \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \boldsymbol{\theta}\ [\boldsymbol{2\pi}] \end{cases}$$



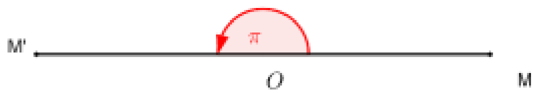
On la note par : $R_{(\Omega,\theta)}$

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est **le seul point invariant.**

Exemples :



- La symétrie centrale S_O est la rotation de centre O et d'angle π



- L'identité $\mathcal{I}d_P$ est la rotation d'angle nul. (tous les points de (P) sont centre de cette rotation)
- $ABCD$ un carré de centre O, R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $R(A) = B$; $R(B) = C$ et $R(D) = A$

2) Propriétés de la rotation

2.1 La décomposition d'une rotation

Soit R la rotation de centre O et d'angle α

①(Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.**

D'après ce qui précède $\left(S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}\right)$ est la rotation de centre O et d'angle $2\times\frac{\alpha}{2}$

Donc : $S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)} = R.$ (figure 1)

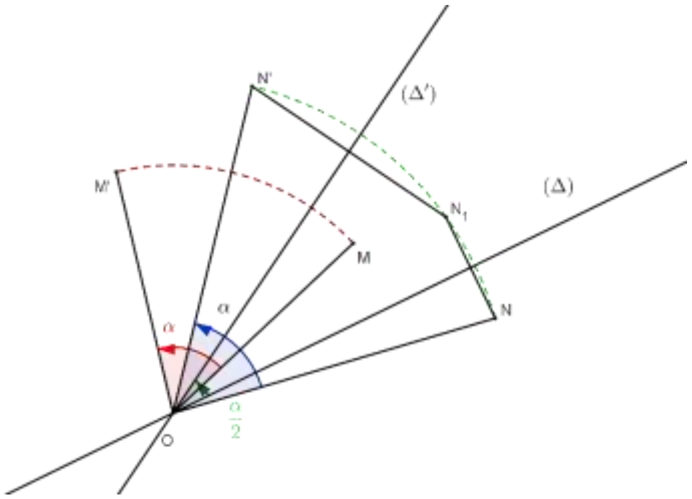


figure 1

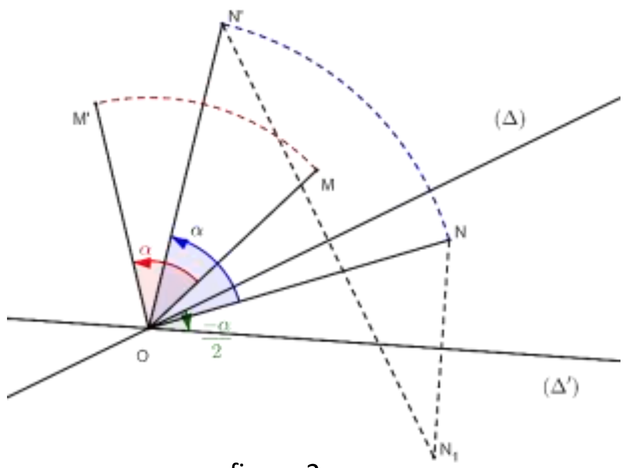


figure 2

② (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\alpha}{2}$.**

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales) $\left(S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')}\right)$ est la rotation de centre O et d'angle $2\times\frac{\alpha}{2}$

Donc : $S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')} = R.$ (figure 2)

Propriété

Soit R la rotation de centre O et d'angle α ; la rotation R peut-être décomposée comme suite :

- $R = S_{(\Delta')}oS_{(\Delta)}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle : $\frac{\alpha}{2}$.**
- $R = S_{(\Delta)}oS_{(\Delta')}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par **la rotation r de centre O et d'angle: $\frac{-\alpha}{2}$.**

2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

- La rotation est une **isométrie (elle conserve les distances) :** **si** $\begin{cases} R(A) = A' \\ R(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = AB$
- La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points
- La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.
- La rotation conserve les mesures des angles géométriques
- La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

Application :

① Soient O, A, B et C quatre points dans le plan tels que $OA = OB$, construire le point D image de C par la rotation de centre O et qui transforme A puis B.

② Soient A, B, C et D quatre points dans le plan tels que $AC = BD$ et $(AB) \nparallel (CD)$; Déterminer le centre de la rotation qui transforme A en B et C en D.

Propriété :

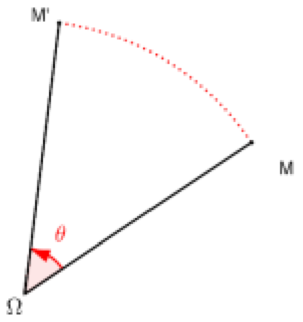
La rotation $R_{(\Omega,\theta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection $R_{(\Omega,-\theta)}$

Preuve :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

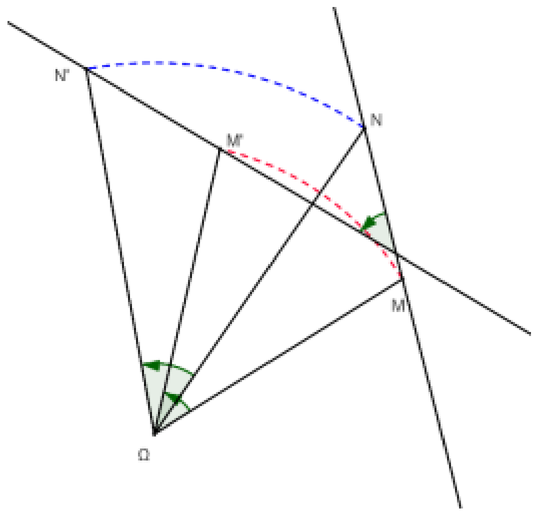
$$\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv -\theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff R_{(\Omega,-\theta)}(M') = M$$



Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit $R_{(\Omega,\theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ si $\begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N' \end{cases}$ alors $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$



Preuve :

On a :

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \ [2\pi]$$

Car $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \ [2\pi]$ (la rotation conserve la mesure des angles orientés)

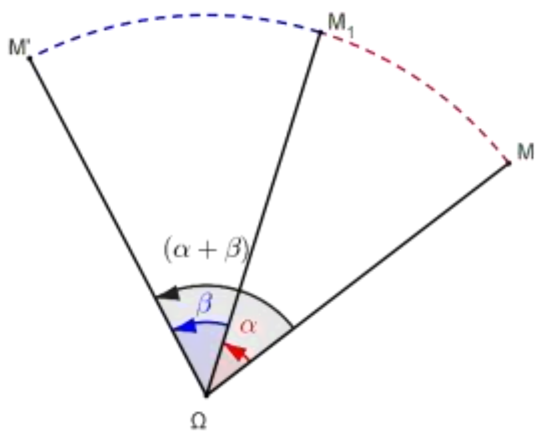
D'où : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$.

III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

1) Composition de deux rotations de même centre

Soient $R_{(\Omega,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations de centre Ω ; Posons $R(M) = M_1$ et $R(M_1) = M'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "R'oR"'] & M_1 \arrow[r, "R'"] & M' \end{tikzcd}$$



$$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \beta \quad [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha + \beta \quad [2\pi] \end{cases}$

Et par suite : $R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}(M) = M'$ et $\left(R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)}\right)(M) = M'$

Donc $R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}$.

Propriété :

La composition de deux rotations $R_{(\Omega,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $(\alpha+\beta)$: $\boldsymbol{R'_{(\Omega,\beta)} o\, R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,\alpha+\beta)}}$.

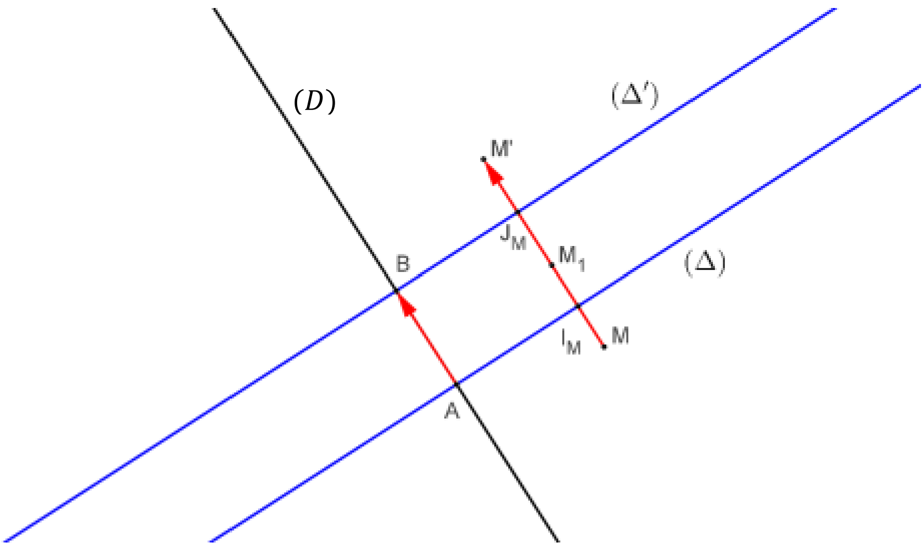
Remarque :

On sait que la rotation $R_{(\Omega,\alpha)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est $R'_{(\Omega,-\alpha)}$

$R'_{(\Omega,-\alpha)} o R_{(\Omega,\alpha)} = R''_{(\Omega,0)} = \mathcal{I}d_P$

2) Composition de deux rotations de centres différents.

2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles



Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles dans le plan. $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ')

On a :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "S_{(\Delta)}"] \arrow[rr, bend right, "S'o\,S"'] & M_1 \arrow[r, "S'_{(\Delta')}"] & M' \end{tikzcd}$$

Soit (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ')

Soient I_M et J_M les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$, on a :

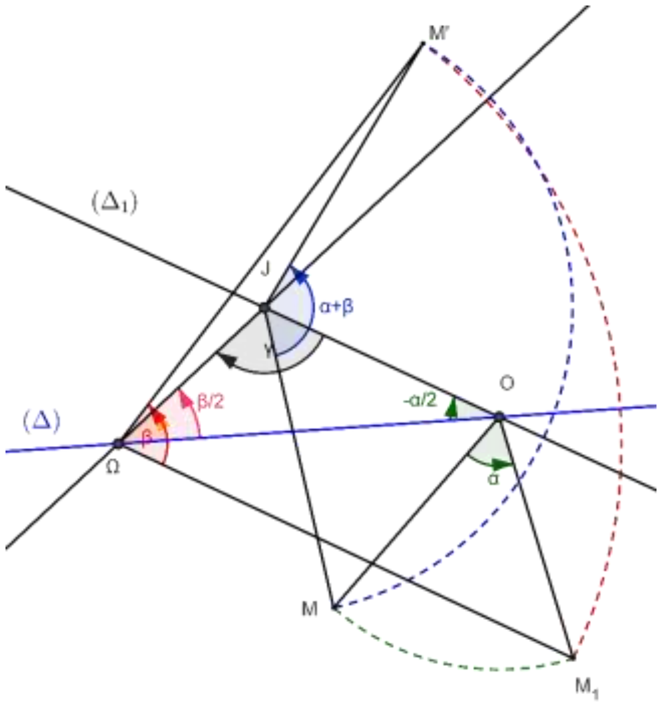
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} \\ &= 2\overrightarrow{I_MM_1} + 2\overrightarrow{M_1J_M} \\ &= 2\overrightarrow{I_MJ_M} \\ &= 2\,\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Propriété :

La composition de deux symétries axiales $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ d'axes parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ') avec (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ alors : $S'_{(\Delta')}oS_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.



Soient $R_{(O,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$ on s'intéresse à la nature de la transformation $R'oR$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée de deux symétries axiales.

Posons $(\Delta) = (O\Omega)$

On a : $R = S_{(\Delta)}oS_{(\Delta_1)}$ où (Δ_1) est l'image de la droite (Δ) par la rotation r_1 de centre O et d'angle $\frac{-\alpha}{2}$

D'autre part :

$R' = S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta)}$ où (Δ_2) est l'image de la droite (Δ) par la rotation r_2 de centre Ω et d'angle $\frac{\beta}{2}$

D'où :

$$\begin{aligned}R'oR &= \left(S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta)}\right)o\left(S_{(\Delta)}oS_{(\Delta_1)}\right) \\ &= S_{(\Delta_2)}o\left(S_{(\Delta)}oS_{(\Delta)}\right)oS_{(\Delta_1)} \qquad \text{(La composition est associative)} \\ &= S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta_1)} \qquad (S_{(\Delta)}oS_{(\Delta)} = \mathcal{I}d_{(P)})\end{aligned}$$

La nature de $R'oR$ **dépend de la position relative de (Δ) et (Δ')**

❶ Si (Δ) et (Δ') se coupent en J (figure 1)

Dans ce cas $R'oR = S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta_1)}$ est une rotation de centre J et d'angle $2(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ modulo 2π où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ_1) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ_2).

<u>Détermination de l'angle de la rotation :2γ</u>

On a : $-\gamma - \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \equiv \pi \ [2\pi]$ (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où : $\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi \ [2\pi]$ $(-\pi \equiv \pi[2\pi])$

finalement : $2\gamma = \alpha + \beta \ [2\pi]$ $(2\pi \equiv 0[2\pi])$

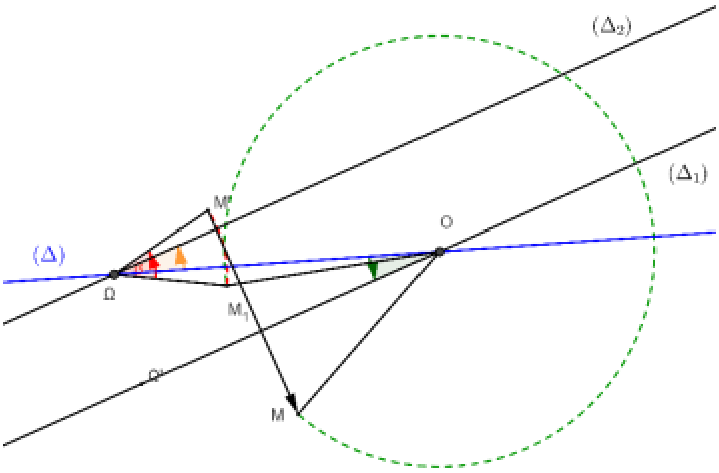
❷ Si (Δ) et (Δ') sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas $R'oR = S_{(\Delta_2)}oS_{(\Delta_1)}$ est une translation.

Quand est ce que (Δ) et (Δ') sont parallèles ?

$$(\Delta)//(\Delta') \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0 \quad [2\pi]$$



Théorème :

Soient $R_{(O,\alpha)}$ et $R'_{(\Omega,\beta)}$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$

- Si $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha + \beta}$**
- Si $\boldsymbol{\alpha + \beta = 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **translation dans le plan.**

Remarque :

Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maitriser toutes les étapes de la démonstration.