

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1) LES ENSEMBLES :

1-1) Activités :

Activité 1 : Soient les ensembles :

$$E = \left\{ x \in]-\pi; 2\pi[\mid \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \left\{ x \in]-\pi; 2\pi[\mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$G = \left\{ x \in]-\pi; 2\pi[\mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Vérifier que : $S \subseteq E$ et $E \subseteq S$ et que $E = S$ et $E = G$

Vérifier que: $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E

et que $E \neq F$

Activité 2 :

Soient $A = \left\{ \frac{5n+8}{8n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \left\{ \frac{2n+4}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? $\frac{43}{25} \in B$? $\frac{42}{37} \in B$?

2- montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

1-2) VOCABULAIRES :

- Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble contient sont appelés éléments de E.

- Si x est un élément de E on dit que x appartient à E et on écrit : $x \in E$

- \emptyset est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite : $\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$.

- Un ensemble peut être défini **en extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

Par exemple : L'ensemble V des voyelles de l'alphabet français en extension est :

$$V = \{a, e, i, o, u, y\}$$

- En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

Par exemple : $E = \{k \in \mathbb{Z} \mid |3k + 1| \leq 5\}$

Exemples :

1) L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est : $D_3 = \{1; 3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension

$$\text{est : } D_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n/3\}$$

2) L'ensemble A des entiers naturels dont les carrés sont inférieurs ou égaux à 40 :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 40\} \quad (\text{en compréhension})$$

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad (\text{en extension})$$

Exercice1 : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} \mid n/180\}$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Solution : 1) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$$D_{180} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 45; 60; 90; 180\}$$

$$A = \{-1; 0; 1\}$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = -3 < 0 \text{ donc : } B = \emptyset$$

2) $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Exercice2 : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid k^2 \leq 7\}$$

$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} \mid 7 \leq k^2 \leq 35\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x+y)(x-y) = 32\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans \mathbb{N}

Solution : 1) $k \in E_1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } |k+1| \leq 2 \Leftrightarrow$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -2 \leq k+1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{Donc : } E_1 = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

$$k \in E_2 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$k^2 \leq 7 \Leftrightarrow |k| \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq k \leq \sqrt{7} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } E_2 = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$k \in E_3 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } 7 \leq k^2 \leq 35$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7} \leq |k| \leq \sqrt{35} \Leftrightarrow |k| \in \{3; 4; 5\} \Leftrightarrow k \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

$$\text{Donc : } E_3 = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\} ?$$

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et

$$x+y \geq x-y \quad 32 = 2^5$$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$E_4 = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

$$E_5 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\} ?$$

$$x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 15$$

De même que : E_4 on a : les diviseurs de 15

sont 1 ; 3 ; 5 ; 15 et $x+y \geq x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
x	8	4
y	7	1

$$2) P = \{5k / k \in \mathbb{N}\}$$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles

$$\text{suivants : } A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Solution : on sait que la fonction cos est périodique

$$\text{de période } 2\pi \text{ et } \frac{n\pi}{6} = 2\pi \Leftrightarrow n = 12$$

$$n \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 11\}$$

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) / n \in [0; 11] \right\}$$

En tenant compte des relations :

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ on en déduit :}$$

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{6\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{11\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{16\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{21\pi}{30}\right) \right.$$

$$; \cos\left(\frac{26\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{31\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{36\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{41\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{46\pi}{30}\right)$$

$$\left. ; \cos\left(\frac{51\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{56\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{61\pi}{30}\right) \right\}$$

$$\text{De même pour sin on a : } B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in [0; 11] \right\}$$

En tenant compte des relations :

$$\sin(\pi - x) = \sin x = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$$

on en déduit :

$$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right\}$$

2) Égalité ; inclusion ; ensemble des parties d'un ensemble

Définition : On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

$$\text{Exemple : } A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\} \text{ et } B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

Montrons que : $A = B$

$$\text{Solution : } k \in A \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } |2k+1| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq 2k+1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -4 \leq 2k \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -2 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Leftrightarrow k \in B$$

Donc on a : $k \in A \Leftrightarrow k \in B$

Donc : $A = B$

Définition : Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F .

On dit aussi que E est un sous-ensemble de F ou encore que E est une partie de F . On note $E \subset F$ ($E \subset F$) $\Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

Exemple : Soit $E = \{0; 1; 2\}$ déterminer tous les ensembles inclus dans E . Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; E\}$$

Définition : Soit E un ensemble, les parties de E , constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}$$

Remarques : 1) A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$

$$A \subseteq E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

$$2) \emptyset \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \emptyset \subset E \quad 3) E \in \mathcal{P}(E) \text{ et } E \subset E$$

Exercice4 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$1) \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \quad 2) \mathcal{P}(\{a; b\})$$

Solution : 1) Il est aisé de voir que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$\text{donc : } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$$

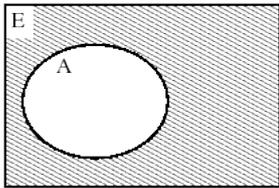
$$2) \mathcal{P}(\{a; b\}) :$$

$$\mathcal{P}(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\} \text{ Donc :}$$

$$P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset, a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset, a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset, a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

3) Complémentaire d'un ensemble

complémentaire



Définition :

Soit A une partie de E , le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A , on le note \bar{A} ou C_E^A .

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

Exemples : Si E un ensemble quelconque :

$$\bar{E} = \emptyset \text{ et } \overline{\emptyset} = E$$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = I$ (Ensembles des irrationnelles).

Exercice5 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a; b[$ l'ensemble \mathbb{Q}

2) l'intervalle $[a; b[$ $a < b$

Solution : 1) le complémentaire de \mathbb{Q} est l'ensemble des irrationnelles et se note $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

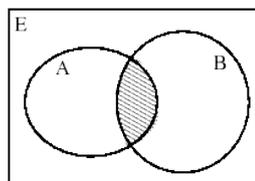
$$2) \overline{[a; b[} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin [a; b[\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a \text{ ou } x < a \}$$

$$\overline{[a; b[} =]-\infty; a[\cup]b; +\infty[$$

4) Intersection ; réunion, différence de deux ensembles.

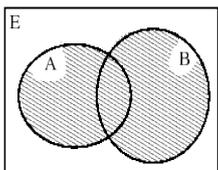
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'intersection de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . On le note par $A \cap B$. $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

intersection



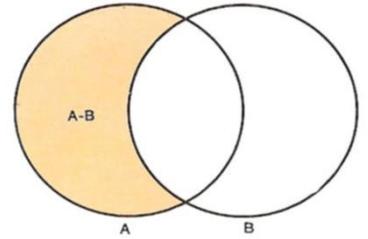
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B . On le note par $A \cup B$.

réunion



$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B .



On le note par $A \setminus B$ ou $A - B$
 $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E , un ensemble, A , B et C des parties de E .

$$(A = B) \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow (A \subset C) \text{ la transitivité}$$

5.2 Intersection et réunion

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A$$

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ L'associativité}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ L'associativité}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ la distributivité}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ la distributivité}$$

5.3 Le complémentaire

$$\overline{\bar{A}} = E/A \text{ et } \overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ lois de Morgan}$$

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$$

5.4 La différence

$$A - B = A - (A \cap B) \quad A - B = A \cap \bar{B}$$

6) Notations généralisées.

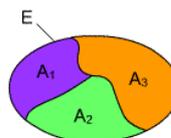
Soient A_1, A_2, \dots, A_n une famille de parties d'un ensemble E , (qu'on peut noter $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^n A_i$

L'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^n A_i$

Définition : Une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de parties d'un

ensemble E s'appelle une partition de l'ensemble E si elle vérifie :



$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E \text{ et } (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$$

on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exercice6: Soient les ensembles :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Monter que : $A \cap B = \emptyset$

Solution : On suppose que : $A \cap B \neq \emptyset$

Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad x_0 \in A \text{ et } x_0 \in B$

$$\Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$$

$$\text{Donc } \Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$$

$$\text{Donc : } \frac{2}{5}(k_1 - k_2) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1 - k_2 = -\frac{5}{8} \text{ contradiction}$$

avec le fait que $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}$ Donc : $A \cap B = \emptyset$

Exercice7 : Soient $A ; B ; C$ et D des parties d'un ensemble E

$$\text{Monter que : } \begin{cases} (\overline{B-C}) \cup A = E \\ (\overline{C-D}) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$$

Solution : On suppose que :

$$(\overline{B-C}) \cup A = E \text{ et } (\overline{C-D}) \cup A = E$$

Remarque que : $A \cup B = E \Rightarrow \overline{A} \subset B$

Donc : $B-C \subset A$ et $C-D \subset A$ cad

$$B \cap \overline{C} \subset A \text{ et } C \cap \overline{D} \subset A$$

Montrons que : $B-D \subset A$ cad $B \cap \overline{D} \subset A$?

Soit $x \in B \cap \overline{D}$

$$x \in B \cap \overline{D} \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in \overline{D}$$

- Si $x \in C$ alors $x \in C \cap \overline{D}$ donc $x \in A$ car $C \cap \overline{D} \subset A$
- Si $x \notin C$ alors $x \in B \cap \overline{C}$ donc $x \in A$ car $B \cap \overline{C} \subset A$

Dans tous les cas : $(B-D) \subset A$

Exercice8 : Soient $A ; B ; C$ des ensembles

Monter que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Solution : On suppose que : $A \subset B \subset C$

$$\text{On a : } A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset B \text{ et } B \subset C$$

$$\Rightarrow A \cup B = B \text{ et } B \cap C = B \Rightarrow A \cup B = B \cap C$$

On suppose que : $A \cup B = B \cap C$

$$\text{On a : } A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \cup B \subset B \text{ et } A \cup B \subset C$$

$$\Rightarrow A \subset B \text{ et } B \subset C$$

$$\Rightarrow A \subset B \subset C$$

$$\text{Donc : } A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$$

Exercice9 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

Monter que :

$$1) A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$3) A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

Solution :1)

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$$

$$= [(A \cap B) \cap (C \cup \overline{C})] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap (C \cup \overline{C})]$$

$$= [(A \cap B) \cap E] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap E] = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$= A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A)$$

$$= (B \cap (C \cup A)) \cup ((A \cap C) \cap (C \cup A))$$

$$= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$$

3) Montrons que :

$$\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C \\ A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \end{cases}$$

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{C}} \Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \Rightarrow A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$$

Inversement :

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$$

D'après l'implication directe

$$\text{Donc : } A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

Exercice10 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

$$\text{Monter que : } \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

Solution : On suppose que :

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \text{ Montrons que :}$$

$$(\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C) ?$$

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in C$$

- Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ car

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ donc } B \subset C$$

- Si $x \notin A$ et puisque $x \in C$ ou $x \in A$ est vraie alors $B \subset C$

$$\text{Conclusion : } (\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C)$$

Donc $B \subset C$

Exercice11 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble

$$\text{Qu'on note : } A \Delta B \text{ tel que : } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$1) \text{Monter que : } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$2) \text{Monter que : } \overline{A \Delta B} = A \Delta B$$

3) Montrer que : $\forall C \in P(E) : A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

Solution : 1)

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= [(A \cap \bar{B}) \cup B] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] \\ &= (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

2) Montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{A \Delta B} &= (\overline{A - B}) \cup (\overline{B - A}) = (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{B \cap A}) \\ &= (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B \end{aligned}$$

3) soit $C \in P(E)$

- Si on a : $B = C$ alors $A \Delta B = A \Delta C$
- Supposons que : $A \Delta B = A \Delta C$ et montrons que $B = C$?

✓ Soit $x \in B$ montrons que $x \in C$?

Si $x \in A$:

$$\begin{aligned} (x \in A \text{ et } x \in B) &\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \Delta B \Rightarrow x \notin A \Delta C \\ (\text{Car } A \Delta B &= A \Delta C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc $A \cap B \subset C$ (1)

Si $x \notin A$:

$$\begin{aligned} (x \notin A \text{ et } x \in B) &\Rightarrow x \in B - A \Rightarrow x \in A \Delta B \Rightarrow x \in A \Delta C \\ (\text{Car } A \Delta B &= A \Delta C) \\ &\Rightarrow x \in C - A \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc $\overline{A} \cap B \subset C$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \subset C$

Et puisque : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = E \cap B = B$

Alors $B \subset C$

De même on montre que : $C \subset B$

Donc : $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

Finalement : $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

7) Produit cartésien

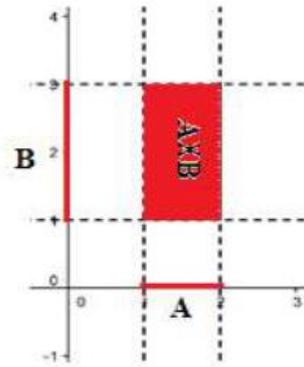
Définition : Soient A et B deux ensembles ; le produit cartésien de A et B est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, On le note par $A \times B$.

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$ Le carré cartésien d'un ensemble A

Est l'ensemble $A \times A$ noté A^2

Exemples :

$$A = [1, 2] ; B = [1, 3]$$



Exercice 12 : Soit l'ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a) vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E = \left\{ \left(\frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; \dots\} \text{ et } B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$$

$$C = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots\}$$

Solution : 1) a)

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + 2y) &= x^2 + 2xy - xy - 2y^2 \\ &= x^2 + xy - 2y^2 \end{aligned}$$

b) $(x, y) \in E \cap \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x, y) \in E$ et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = -5 \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} x - y = -5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } E \cap \mathbb{Z}^2 = \{(-3; 2); (3; -2); (1; 2); (-1; -2)\}$$

c) $(x, y) \in E \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = t \\ x + 2y = \frac{-5}{t} \end{cases} : t \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{2t^2 - 5}{3t} \text{ et } y = \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) : t \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ \left(\frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$\text{Donc : } E = \left\{ \left(\frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$$

4) $A = \{k^2; k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \left\{ \frac{(-1)^k}{k}; k \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$C = \{1 + 3n; n \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice13 : soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1) déterminer le complémentaire de $A \times F$ dans $E \times F$

2) déterminer le complémentaire de $E \times F$ dans

$$E \times F$$

3) déterminer le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$

Solution : 1) le complémentaire de $A \times F$ dans

$$E \times F \text{ se note : } C_{E \times F}^{A \times F} \text{ ou } \overline{A \times F}$$

$$(x; y) \in \overline{A \times F} \Leftrightarrow (x; y) \notin A \times F \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } y \notin F$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{F} \Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } y \notin F$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ Car : } y \notin F \text{ donne l'ensemble vide}$$

$$\text{Donc : } \overline{A \times F} = \overline{A} \times F$$

$$(x; y) \in \overline{E \times B} \Leftrightarrow (x; y) \notin E \times B \Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{E} \text{ ou } y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x; y) \in E \times \overline{B} \text{ ou } x \notin E$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in E \times \overline{B} \text{ Car : } x \notin E \text{ donne l'ensemble vide}$$

$$\text{Donc : } \overline{E \times B} = E \times \overline{B}$$

3) $(x; y) \in \overline{A \times B} \Leftrightarrow (x; y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } y \notin B$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } (x; y) \in E \times \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$$

$$\text{Donc : } \overline{A \times B} = (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$$

Exercice14 : soient l'ensemble :

$$L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Montrer qu'il n'existe pas deux parties A et B de \mathbb{R}

tels que : $L = A \times B$

Solution : On suppose: qu'il existe deux parties A et

B de \mathbb{R} tels que : $L = A \times B$

On a : $(1; 0) \in L$ et $(0; 1) \in L$

Donc : $1 \in A$ et $1 \in B$ car $L = A \times B$

Donc : $(1; 1) \in A \times B$ cad $(1; 1) \in L$

Donc contradiction car : $1^2 + 1^2 > 1$

Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de \mathbb{R}

tels que : $L = A \times B$

Exercice15 : Soient les ensembles :

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

1- montrer que : $H =]0, 1]$.

a- Considérer un élément $y_0 \in H$

et montrer que $y_0 \in]0, 1]$

b- Considérer un élément $y_0 \in]0, 1]$

et montrer que $y_0 \in H$

2- Montrer que $G \subset H$

3- Est-ce que $G = H$?

Solution :

1- a- soit un élément $y_0 \in H$ montrons que $y_0 \in]0, 1]$?

$$y_0 \in H \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\text{On a } x_0^2 \geq 0 \Rightarrow x_0^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$y_0 \in]0, 1] \text{ Donc : } H \subset]0, 1] \text{ (1)}$$

b- Considérer un élément $y_0 \in]0, 1]$

et montrons que $y_0 \in H$?

$$y_0 \in]0, 1] \quad \exists ? x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{1}{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{y_0^2} - 1$$

$$\text{Or : } y_0 \in]0, 1] \text{ donc } 0 < y_0 \leq 1 \text{ donc } \frac{1}{y_0^2} - 1 \geq 0$$

$$\text{Donc : il suffit de prendre : } x_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1} \text{ Donc : } y_0 \in H$$

$$\text{Donc : }]0, 1] \subset H \text{ (2)}$$

De : (1) et (2) en déduit que : $H =]0, 1]$

2- montrons que $G \subset H$??

Montrons que : $G \subset]0, 1]$?

soit un élément $y_0 \in G$ montrons que $y_0 \in]0, 1]$?

$$y_0 \in G \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\text{On a } x_0^2 \geq 0 \Rightarrow x_0^2 + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} + 1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\text{Donc : } y_0 \in]0, 1] \text{ Donc : } G \subset H$$

3) supposons : $G = H$

On a $1 \in H \Rightarrow 1 \in G$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 + \sqrt{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / \sqrt{x_0^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / x_0^2 = -1 \text{ absurde donc : } H \neq G$$

Exercice16 : on considère dans \mathbb{Z} les deux parties suivantes :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x + 10}{x - 5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

1)a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$

1)b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$

2) déterminer : A ; B ; $A - B$; $B - A$ et $A \Delta B$ en extension

3) on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de \mathbb{Z} : $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A \Delta X = B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$$(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$$

1) b) il est aisé aussi de voir que

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1} = \frac{(2x - 1)^2 + 9}{2x - 1} = \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1}$$

2) détermination de : A ?

On a : $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) 2x - 1 \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$$

En déduit que : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; x \in A \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x - 1 \text{ divise } 9$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\} \Leftrightarrow 2x \in \{-8; -2; 0; 2; 4; 10\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} \text{ donc : } A = \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$$

détermination de : B ?

soit $x \in \mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$$x \in B \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ et } x - 5 \text{ divise } 15$$

$$\Leftrightarrow x - 5 \in \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} \text{ donc :}$$

$$B = \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\}$$

détermination de : $A - B$; $B - A$ et $A \Delta B$?

$$A - B = \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} - \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} = \{-4; -1; 1; 5\}$$

$$A - B = \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} - \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (A - B) = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20; -4; -1; 1; 5\}$$

3) Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A \Delta X = B$

On trouve : $X = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20; -4; -1; 1; 5\}$

Exercice17 : Soient les ensembles :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$$

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1) montrer que : $F \subset E$

2) déterminer y de \mathbb{R} tel que : $(1; y) \in E$; est ce que on a $E \subset F$?

3) montrer que : $E = F \cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

a) montrer que : $H = A \cup B$

b) déterminer : $H \cap F$

Solution : 1) montrons que : $F \subset E$?

On a : $(x; y) \in F \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$$\Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = y^2 + y^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow (x; y) \in E$$

Donc : $F \subset E$

2) $(1; y) \in E \Leftrightarrow 1 - y - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (1 + y)(1 - 2y) = 0$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Donc : $\left(1; \frac{1}{2}\right) \in E$ ou $\left(1; \frac{1}{2}\right) \notin F$

Donc : $\exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x; y) \notin F$ et $(x; y) \in E$

Donc : $E \not\subset F$

3) $(x; y) \in E \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + xy - 2y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x + y) - 2y(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ ou } x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in F \text{ ou } (x; y) \in G$$

Avec : $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$

Donc : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 (x; y) \in E \Leftrightarrow (x; y) \in F$ ou $(x; y) \in G$

Donc : $E = F \cup G$

4) a) $(x; y) \in H \Leftrightarrow y^2 - 2y(x + 1) + 2x = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y(x + 1) + (x + 1)^2 - (x + 1)^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow [y - (x + 1)]^2 = (x + 1)^2 - 2x \Leftrightarrow [y - (x + 1)]^2 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} \text{ ou } \Leftrightarrow y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in A \text{ ou } (x; y) \in B \text{ Donc : } H = A \cup B$$

4) b) $(x; y) \in H \cap F \Leftrightarrow (x; y) \in H$ ou $(x; y) \in F$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2x - 2y = 0 \text{ et } x = -y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x^2 + 2x + 2x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x + 4) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3} \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3} \text{ et } y = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc : } (x; y) \in H \cap F \Leftrightarrow (x; y) \in \left\{ (0; 0); \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \right\}$$

$$H \cap F = \left\{ (0; 0); \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \right\}$$

Exercice 18 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

1) a) déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A \cup X = B$

b) résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A \cup X = B$

2) on suppose que $C \subset A \subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

Solution : 1) si on a : $A \cup X = B$ alors : $X \subset B$ et $A \subset B$
Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A \cup X = B$ est $A \subset B$

b) résolution dans $P(E)$ l'équation : $A \cup X = B$

$$A \cup X = B \Rightarrow (A - B) \cap (A \cup X) = (B - A) \cap B$$

$$\Leftrightarrow [(B - A) \cap A] \cup [(B - A) \cap X] = B - A$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \cup [(B - A) \cap X] = B - A$$

$$\Leftrightarrow (B - A) \cap X = B - A \Leftrightarrow B - A \subset X \Rightarrow B - A \subset X \subset B$$

Inversement :

$\forall X \in P(E)$ tel que : $B - C \subset X \subset B$ est solution de l'équation : $A \cup X = B$

$$\text{Et on a : } (B - A) \cup A = B \quad (B - A) \cap A = \emptyset$$

$$\text{Donc : } A \cup X = B \Leftrightarrow X = (B - A) \cup Y \quad Y \in P(E)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ (B - A) \cup Y ; Y \in P(E) \right\}$$

2) $C \subset A \subset B$

$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y / Y \in P(E) \\ A \cap [(B - A) \cup Y] = C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y / Y \in P(E) \\ [A \cap (B - A)] \cup [A \cap Y] = C \end{cases}$$

et puisque $A \cap (B - A) = \emptyset$ et $A \cap Y = Y$ car $Y \subset A$

$$\text{alors : } X = (B - A) \cup C$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

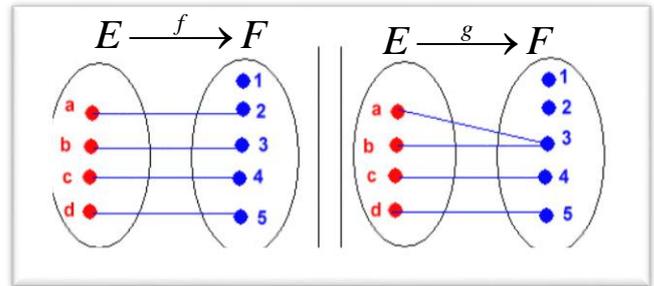
$$S = \left\{ (B - A) \cup C \right\}$$

II) LES APPLICATIONS

1) Activités : Activité 1 :

Considérons les ensembles :

$E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, f, g sont des relations de E dans F .



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 : Soit la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

1- Montrer que chaque élément de \mathbb{R} a une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

$$(P) \quad (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b)).$$

3- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

4- Montrer que $(\forall y \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]) (\exists x \in \mathbb{R}) (f(x) = y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F .

Vocabulaire :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

1) L'ensemble E s'appelle ensemble de départ de l'application f .

2) L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de l'application f .

3) $y = f(x)$ s'appelle l'image de x par l'application f .

4) x s'appelle l'antécédent de y par l'application f .

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemple 1 : f est une l'application de

$$x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

$\mathbb{R} - \{0\}$ dans \mathbb{R}

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemple 2 : g n'est pas une l'application de

$$x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

\mathbb{R} dans \mathbb{R} car 0 n'admet pas d'images

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto (-1)^n \times n \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} n, \text{ si } n \text{ pair} \\ -n, \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

Définition : On dit que deux applications f et g sont égales si :

- 1) Elles ont le même ensemble de départ E
- 2) Elles ont le même ensemble d'arrivée F
- 3) $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$.

Exemple1 : Les 3 applications :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Sont différentes.

Exemple2 : soit les 2 applications :

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto (-1)^n \quad \text{et} \quad n \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

que deux applications f et g ont le même ensemble de départ \mathbb{Z} et le même ensemble d'arrivée \mathbb{R}

Et on a :

$$g(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n = f(n)$$

Donc : $f = g$

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est injective de E dans F si :

$$\forall (x_1; x_2) \in E^2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow \forall (x_1; x_2) \in E^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$

f est-elle injective ?

Solution : soient $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0$$

Or $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{donc } f \text{ est injective}$$

Exemple2 : soit l'application : $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

g est-elle injective ?

Solution : on a : $g(1) = g(-1) = 0$ mais $1 \neq -1$

Donc g n'est pas injective

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice19 : 1) $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

Montrer que f est injective

2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ g est-elle injective ?

$$x \mapsto x^2 + 4$$

$$h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

2) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E .

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E .

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow]-\infty; 3]$

$$x \mapsto 3 - x^2$$

f est-elle surjective de \mathbb{R}^+ vers $]-\infty; 3]$.

Solution : soient $y \in]-\infty; 3]$

Resolvons l'équation: $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = 3 - y$$

Or $y \in]-\infty; 3]$ donc $y \leq 3$ donc $0 \leq 3 - y$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - y} \quad \text{car } x \in \mathbb{R}^+$$

Donc : $(\forall y \in]-\infty; 3])(\exists x \in \mathbb{R}^+)(f(x) = y)$

Donc : f est surjective

Exemple2 : soit l'application : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3 - x^2$$

f est-elle surjective de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} . ?

Solution : on remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ on a : } f(x) \leq 3$$

Donc par exemple l'équation: $f(x) = 4$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R}^+ donc : f est non surjective

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice 20: 1) $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

- a- f est-elle surjective de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers \mathbb{R} .
 b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- a- Montrer que la fonction g est surjective.
 b- g est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$

3) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

h est-elle surjective ?

Définition : (bijection) Soit f une application de E dans F , on dit que f est une bijection de E dans F si elle injective et surjective

Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$$(\forall y \in F) (\exists ! x \in E) (f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E .

Exemple1 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 - 5x$

f est-elle une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?

Solution : soient $y \in \mathbb{R}$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2 - 5x = y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{5}$$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans \mathbb{R} ($\forall y \in \mathbb{R}$)

Donc : f est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Exercice21 :

$$f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que f est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2; +\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1; +\infty[$ tel que $f(x) = y$
 L'application qui lie l'élément y de $[2; +\infty[$, à l'élément unique x de $[1; +\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection f et se note : f^{-1}

Définition : Si f est une bijection de E dans F ;
 L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f

et se note f^{-1} . f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$$

$$f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$$

Exemple : soit l'application :

$$x \mapsto \frac{2}{x-1}$$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution soient $y \in]0; +\infty[$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} = y \\ x \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{y} \\ x \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y} + 1$$

$$(\forall y \in]0; +\infty[) (\exists ! x \in]1; +\infty[) (f(x) = y)$$

Donc : f est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\forall y \in]0; +\infty[\quad f^{-1}(y) = \frac{2}{y} + 1 \quad \text{Donc : } f^{-1} :]0; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2}{x} + 1$$

Exercice 22: Déterminer la fonction réciproque de la

fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

Exercice 23 : Soit la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

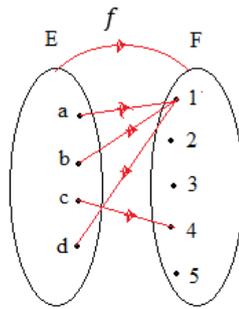
Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité /Activité 1 :

Soit f dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre

- Déterminer les images directes des ensemble $\{a, b, c\}$ et $\{b, c\}$ et E



- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles : $\{1\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$ et $\{1,4\}$

Activité 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que $\forall x \in [-1;1] \quad f(x) \in \left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$

2- Montrer que : $\forall y \in \left[\frac{-3}{16}; 3 \right] \exists x \in [-1;1] / (f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par

l'application f est l'intervalle $\left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$ et on écrit :

$$f([-1;1]) = \left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$$

$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Activité 3 : Soit $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient

$$h((x,y)) = 1$$

- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x, y)$ qui vérifient $h((x, y)) = 1$.

Définition : Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Remarques : 1) Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y) \end{cases}$$

2) $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ mais si $f^{-1}(B) = \emptyset$ on ne peut pas dire que $B = \emptyset$ exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{on a : } f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$$

$$x \mapsto 2x^2 + 1$$

3) Pour parler de l'image réciproque d'un élément par une fonction, il faut que f soit bijective

Mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f

Propriété : Soit f une application de E dans F .
 f est surjective de E dans F , si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve : On a : f une application de E dans F donc :
 $f(E) \subset F$; si de plus f est surjective alors :

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y) \quad \text{et donc } F \subset f(E).$$

D'où $f(E) = F$

Réciproquement si $f(E) = F$ alors $F \subset f(E)$ et par suite : $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$ donc f est surjective.

Exemple1 : soit l'application : $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

2) Déterminer : $f(K)$ avec $K =]-\infty; -1[$

Solution : 1) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:

$$3 - \frac{4}{x+1} = \frac{3x+3-4}{x+1} = \frac{3x-1}{x+1} = f(x)$$

$$2) x \in K \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{4}{x+1} > 3 \Leftrightarrow g(x) \in]3; +\infty[\quad \text{donc } f(K) =]3; +\infty[$$

Exemple2 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B = [-1; 4]$

Solution :

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq f(x) \leq 4\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 \leq 4\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\} = [-2; 2] \quad \text{donc } f^{-1}(B) = [-2; 2]$$

Exemple3 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D =]1; 2]$

Solution :

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in D\} = \{x \in \mathbb{R} / 1 < f(x) \leq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 1 < \cos x \leq 2\} = \emptyset \quad \text{car}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} / -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{donc } f^{-1}(D) = \emptyset$$

Exercice 24:

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \quad \text{déterminer } f^{-1}([1,2]) \quad f^{-1}([1;2])$$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1 : Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3|1-x^2| + x \quad \text{Ecrire l'expression de } f \text{ sur } [-1,1]$$

Activité 2 : Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g , définir une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Définition : Soit f une application de E dans F

Soit A une partie de E , l'application définie de A vers F , qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle la restriction de f sur l'ensemble A .

Soit Γ un ensemble tel que $E \subset \Gamma$, l'application définie de Γ vers F , qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle un prolongement de f sur l'ensemble Γ .

Exemple1 : soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Solution : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

Si $x \in]-\infty;1]$ alors : $f(x) = -(x-1) = -x+1$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$ est

l'application $g :]-\infty;1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -x+1$

Exemple2 : soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - |x| + 3$$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x) = 2x - |x| + 3$

Si $x \in]-\infty;0]$ alors : $f(x) = 2x + x + 3 = 3x + 3$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est

l'application $g :]-\infty;0] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x + 3$

Exemple3 : soit les applications :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \quad \text{et} \quad x \mapsto 2|x| - x$$

Est-ce que g est un prolongement de f ?

Solution : $g(x) = 2|x| - x = x$ Si $x \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

Donc : g est un prolongement de f sur \mathbb{R}

7) La partie entière d'un réel.

Théorème : On admet la proposition suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists ! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k + 1).$$

Définition : L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent

S'appelle la partie entière du réel x

on le note $[x]$ ou $E(x)$.

L'application qui lie chaque élément x de \mathbb{R} par $E(x)$ dans \mathbb{Z} s'appelle l'application partie entière.

Exemple : $E(\sqrt{2}) = 1 \quad E(\sqrt{2}) = 1 ; \quad E(\pi) = 3$

$$E(-\pi) = -4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(E\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \right)$$

et $(\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$

Exercices25 : 1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x)).$$

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$$E(x+y) \neq E(x) + E(y)$$

3) Soit l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto E(3x+1) + x$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.

Activité : Soient les deux applications :

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

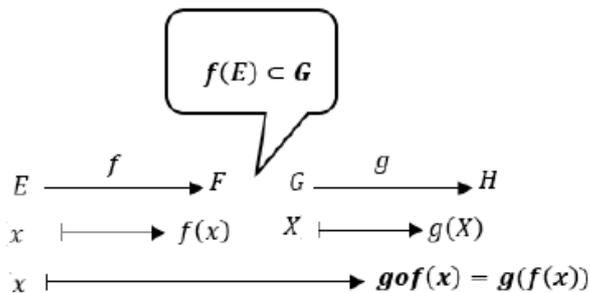
3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application $f \circ g$ et $g \circ f$.

Définition : Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $f(E) \subset G$, l'application h définie de E vers H par pour tout x dans E , $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note $g \circ f$.

$$(\forall x \in E) (g \circ f(x) = g(f(x)))$$

On peut représenter la composition par :



Propriété :

- 1) La composition de deux applications injectives est une application injective
- 2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- 3) La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propriété : 1) La composition des applications est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

2) La composition des applications n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$

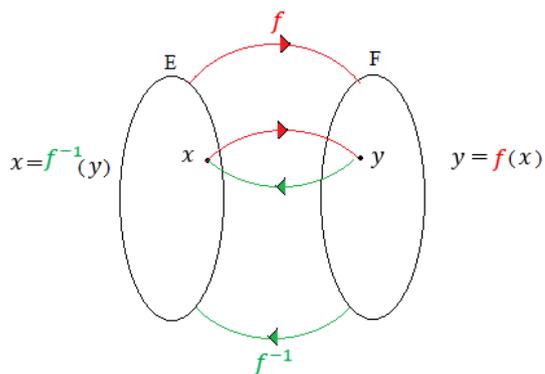
Propriété :

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque :

1) $(\forall x \in E) (f^{-1} \circ f)(x) = x$ $f^{-1} \circ f$ s'appelle l'identité de E et s note Id_E

2° $(\forall x \in F) (f \circ f^{-1})(x) = x$, $f \circ f^{-1}$ s'appelle l'identité de F et s note Id_F

Si $E = F$ alors : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$



$$h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

Exemple : soit l'application :

1) Ecrire l'application h comme la composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$

2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que h est une bijection de \mathbb{R}^+ dans

$\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2$

Donc : $h = g \circ f$ avec :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\quad \text{et} \quad g: \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad \quad \quad x \mapsto x^2$$

2)a) f est une bijection en effet :

soient $y \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-1}{2}$$

Or $y \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ donc $2y-1 \geq 0$ donc $x = \left(\frac{2y-1}{2} \right)^2$

donc $x = \left(y - \frac{1}{2} \right)^2$ Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution

donc : f est une bijection de \mathbb{R}^+ vers $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$.et

$$f^{-1}: \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$ vers $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ en et

$$g^{-1}: \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

c) h est la composée de deux bijections f et g

donc h est une bijection de \mathbb{R}^+ dans $\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$

Et $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est

$$h^{-1}: \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Exercice 26 : soient les applications :

$$f :]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[\quad g :]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$$

$$x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^2$$

1) Déterminer : $f([2; 4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3a) vérifier que : $\forall x \in]1; +\infty[: g(x) = (f(x))^2$

3b) en déduire que : g est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1)

$$f([2; 4[) = \{f(x) / x \in [2; 4[\} = \{f(x) / 2 \leq x < 4 \}$$

$$= \{f(x) / \sqrt{2}-1 \leq \sqrt{x}-1 < 1 \} = \{f(x) / 1 < \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \}$$

$$= \{f(x) / 3 < f(x) \leq 3 + 2\sqrt{2} \}$$

$$\text{Donc : } f([2; 4[) =]3; 3 + 2\sqrt{2}]$$

$$g^{-1}(\{9\}) = \{x \in]1; +\infty[/ g(x) \in \{9\} \} = \{x \in]1; +\infty[/ g(x) = 9 \}$$

$$g^{-1}(\{9\}) = \{x > 1 / \sqrt{x} = 2 \} = \{4\}$$

2) montrons que f est injective ?

soient $x_1 \in]1; +\infty[$ et $x_2 \in]1; +\infty[$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{x_1}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x_2}-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}-1 = \sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

$$\forall y \in]1; +\infty[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2$$

Et on a :

$$\left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2 - 1 = \left(\frac{y+1}{y-1} - 1 \right) \left(\frac{y+1}{y-1} + 1 \right) = \frac{4y}{(y-1)^2}$$

$$\text{Donc : } \forall y \in]1; +\infty[\left[\left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2 > 1 \text{ donc :} \right.$$

$$\left. \left(\forall y \in]1; +\infty[\right) \left(\exists x \in]1; +\infty[\right) / x = \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2 \text{ et } y = f(x) \right)$$

Donc : que f est surjective de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ y \in]1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

$$f^{-1} :]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$$

$$\text{Donc : } x \mapsto \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

3a) vérifier que : $\forall x \in]1; +\infty[:$

$$(f(x))^2 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right)^2 = g(x)$$

3b) on a : $g = h \circ f$ avec $h(x) = x^2 \quad \forall x \in]1; +\infty[:$

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ alors $g = h \circ f$ est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$

et on a :

$$g^{-1}(x) = (h \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ h^{-1}(x)$$

$$= f^{-1}(h^{-1}(x)) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^2 = g(x)$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

