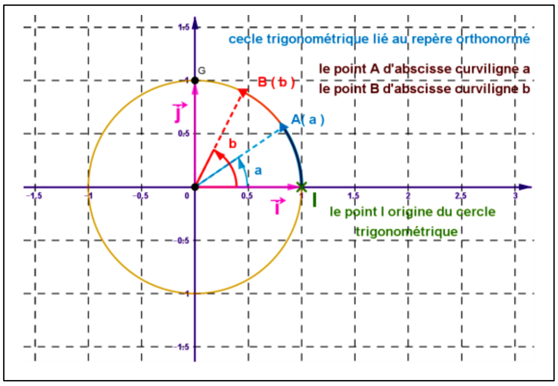
I. Formules de transformations $\sin(a\pm b)$; $\cos(a\pm b)$; $\tan(a\pm b)$:

01. Transformation de $\cos(a+b)$ puis $\sin(a+b)$:

- Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- $\mathcal{C}(O,1)$ est le cercle trigonométrique lié au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- A et B et I trois points de $(\mathcal{P})$ tel que : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et a et b abscisses curvilignes de A et B respectivement .
- On rappel : mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ est a c.à.d. $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}\equiv a\ (2\pi)$ ou encore $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}=a+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$.
- On rappel : mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ est b c.à.d. $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}\equiv b\ (2\pi)$ ou encore $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}=b+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$



1 Déterminer les cordonnés des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

2 Calculer : $\overline{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})}$ en fonction de a et b .

3 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes .

4 On déduit la formule de $\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)$.

5 On déduit la formule de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

02. Propriété :

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on a :

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

03. Conséquences :

Le cas où $a=b$ on obtient :

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.
- D'après $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ on obtient : $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.
- $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ et $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

04. Application :

1 Trouver la valeur de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$. On a :

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{3\pi+4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2 Calculer : $\cos\frac{\pi}{8}$

Correction :

On a : $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ on prend $a=\frac{\pi}{8}$ d'où $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$.

Par suite $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ mais $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{8}>0$.

Conclusion : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

05. Transformation de : $\tan(a+b)$

- a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

1 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin a$; $\cos b$; $\cos a$ et $\sin b$.

2 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ (on peut factoriser par $\frac{1}{\cos a\times\cos b}$

3 On déduit : $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$

06. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. on a :

$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$ et $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$ et $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

II. Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes :

01. Activité :

D'après les formules $\cos(a\pm b)$ et $\sin(a\pm b)$.

1 Simplifier : $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)-\cos(a-b)$ et $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ et $\sin(a+b)-\sin(a-b)$.

2 On déduit les formules de transformations de : $\cos a\times\cos b$ et $\sin a\times\sin b$ et $\sin a\times\cos b$.

3 On pose : $a+b=x$ et $a-b=y$ écrire a et b en fonction de x et y .

4 On déduit les formules de : $\cos x+\cos y$ et $\cos x-\cos y$ et $\sin x+\sin y$ et $\sin x-\sin y$ en fonction de $\sin\frac{x-y}{2}$; $\cos\frac{x+y}{2}$; $\cos\frac{x-y}{2}$ et $\sin\frac{x+y}{2}$.

5 On déduit les formules de transformations obtenues .

02. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}$ on a :

Transformations des sommes à des produits	Transformations des produits à des sommes
$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$
$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$
$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$
$\sin a-\sin b=-2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	

03. Exemple :

1 Trouver la valeur de chaque expressions : $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$.

On a : $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Conclusion : $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

III. D'autres formules de transformations :

A. Transformation de : $a\cos x+b\sin x$:

01. Activité :

a et b de $\mathbb{R}^*$, on considère l'expression suivante $A=a\cos x+b\sin x$.

1 Factoriser l'expression A en fonction de $\sqrt{a^2+b^2}$.

2 Trouver une écriture de A sous la forme de $\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$ ou $\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$ avec α de $\mathbb{R}$ (on remarque que $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$) .

3 Donner les deux transformations obtenues .

02. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}^*$; on a :

- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$; (avec $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) .
- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$; (avec $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) .

03. Exemple :

1 Trouver une transformation de $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$.

On a : $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. Transformations de : $\cos x$; $\tan x$ et $\sin x$ en fonction de $t=\tan\frac{x}{2}$.

01. Activité :

On pose : $x\neq\pi+2k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

1 On rappel que : $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ écrire ses deux formules avec $2a=x$.

2 On pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ trouver $\cos x$; $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de t (on peut diviser le numérateur et le dénominateur par $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$)

Correction pour $\sin x$:

On a : $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=2\frac{t}{1+t^2}$

02. Propriété :

On pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ avec $x\neq\pi+2k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

03. Exemple :

Calculer : $\tan\frac{\pi}{8}$.

Correction :

On a : $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$ avec $t=\tan\frac{a}{2}$ et on prend $a=\frac{\pi}{4}$.

D'où : $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$

Donc $\Delta'=1$ par suite on a deux solutions : $t_1=-1+\sqrt{2}$ et $t_2=1+\sqrt{2}$

On a : $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$ donc $\tan 0<\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{4}$ d'où : $0<\tan\frac{\pi}{8}<1$ la solution acceptée est $t_1=-1+\sqrt{2}$.

Conclusion : $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$.

IV. Rappel sur les équations trigonométriques :

A. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

01. Propriété :

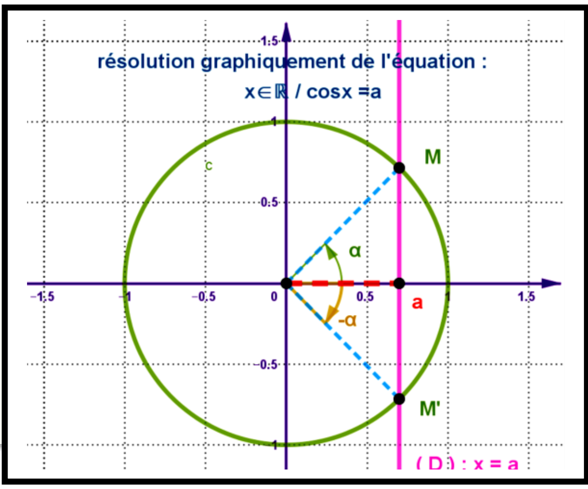
a est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$ est :

- Si $a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors $S = \varnothing$ (pas de solution)
- Si $a \in [-1,1]$ on cherche α tel que $a = \cos\alpha$ d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} .$$

Par suite ensemble de solutions de l'équation est :

$S = \{\alpha + 2k\pi , -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.



02. Cas particuliers :

- $a = 1$ on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. $a = -1$ on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- $a = 0$ on a : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

03. Exemple :

Résoudre l'équation : $(E) : x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{1}{2}$.

On a : $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi , -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

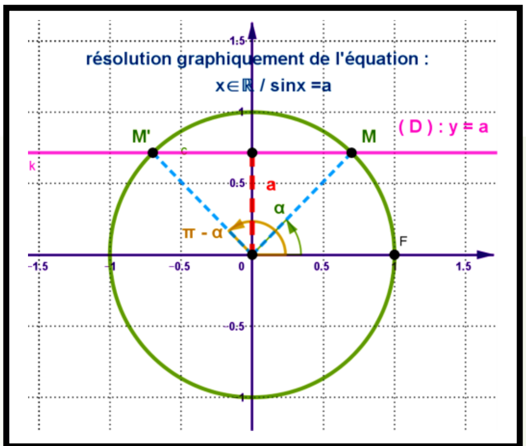
B. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

01. Propriété :

a est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$ est :

- Si $a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors $S = \varnothing$ (pas de solution) .
- Si $a \in [-1,1]$ on cherche α tel que $a = \sin\alpha$ d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} .$$



Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S = \{\alpha + 2k\pi , \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

02. Cas particuliers :

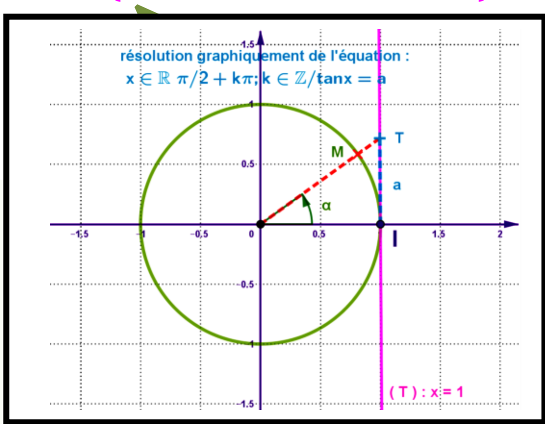
$a=1$ on a : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$. $a=-1$ on a : $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$. $a=0$ on a : $S=\left\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

03. Exemple : Résoudre l'équation : $(E): x\in\mathbb{R} / \sin x=\frac{1}{2}$.

On a : $\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$.

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. Equation de la forme : $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\} : \tan x=a$



01. Propriété :

a est un nombre réel donné pour résoudre l'équation (E) : $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\} : \tan x=a$:

- on cherche α tel que $a=\tan\alpha$ d'où :
- $\tan x=a \Leftrightarrow \tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.
- Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S=\left\{\alpha+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. Equation de la forme : $x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$.

01. Activité :

1 Résoudre l'équation suivante de deux façons différentes : (E) : $x\in\mathbb{R}$: $\cos x+\sqrt{3}\cos x=1$.

02. Propriété :

Pour résoudre l'équation suivante (E) : $x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$ on suit les étapes suivantes :

1ère étape :

- On écrit l'équation sous la forme suivante $(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right]=c$.
- Puis on l'écrit $(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right]=c$ $\left(\text{ou } \sqrt{a^2+b^2}\left[\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x\right]=c\right)$
- Puis on l'écrit $(E) \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{ou } \sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

2ième étape :

- Au lieu de résoudre l'équation (E) : $x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$ on résoudre l'équation :

$$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(\text{ou } \sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

3$^{\text{ième}}$ étape :

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$ l'équation n'a pas de solution ; $S=\varnothing$.
- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ on cherche β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$) d'où

$(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$ (ou $\sin(x+\alpha) = \sin\beta$) .

03.

Exemple :

Résoudre l'équation : $(E) : x\in\mathbb{R} : \cos 3x + \cos 3x = 1$. on a :

$$\cos 3x + \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 3x\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$$

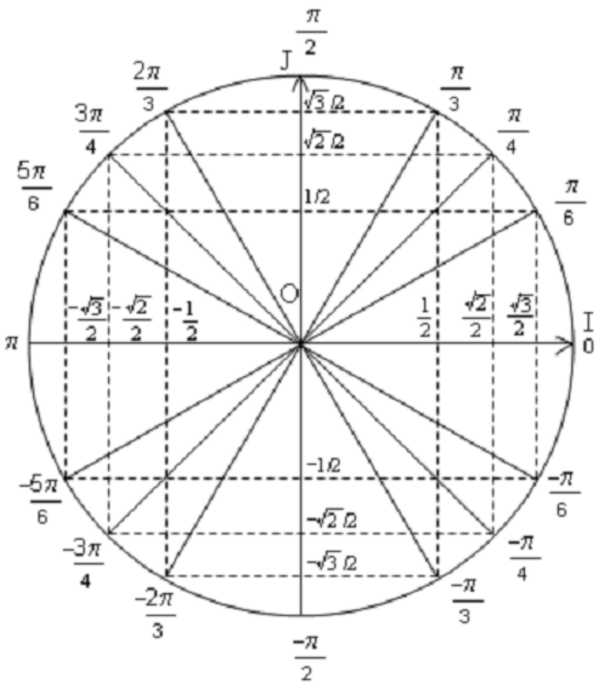
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$$

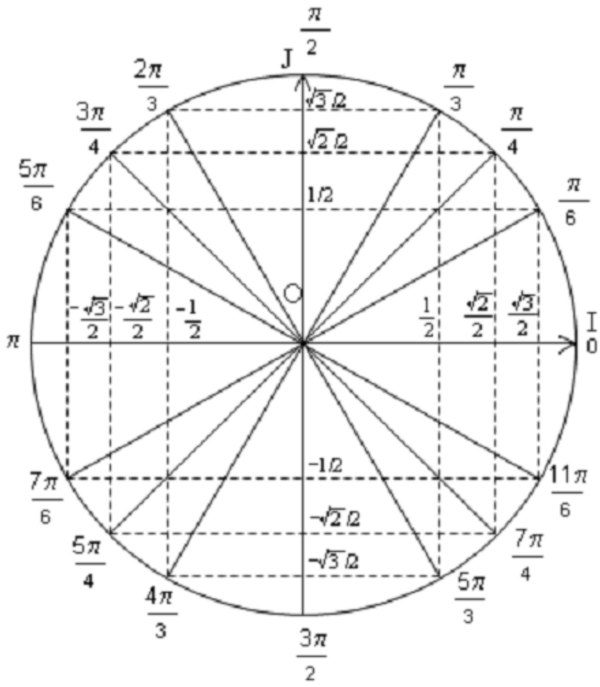
Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}\ ,\ -\frac{2k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$[-\pi;\ \pi]$

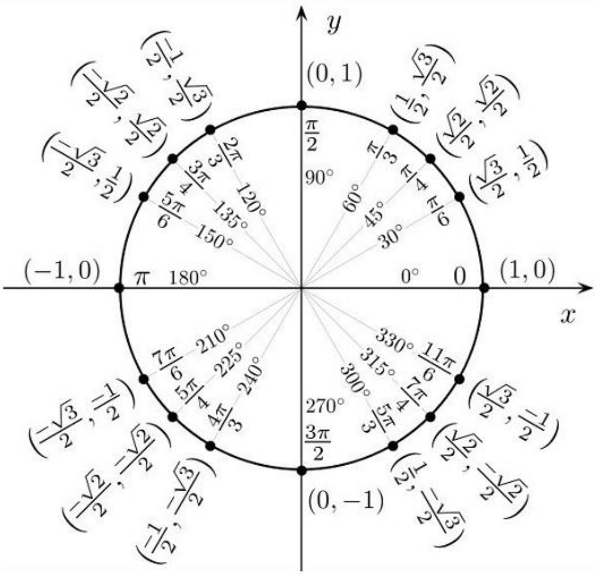


J
I
0
O
π
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{-5\pi}{6}$
$\frac{-3\pi}{4}$
$\frac{-2\pi}{3}$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{3}$
$\frac{-\pi}{4}$
$\frac{-\pi}{6}$
√3 /2
√2 /2
1/2
-1/2
-√2 /2
-√3 /2

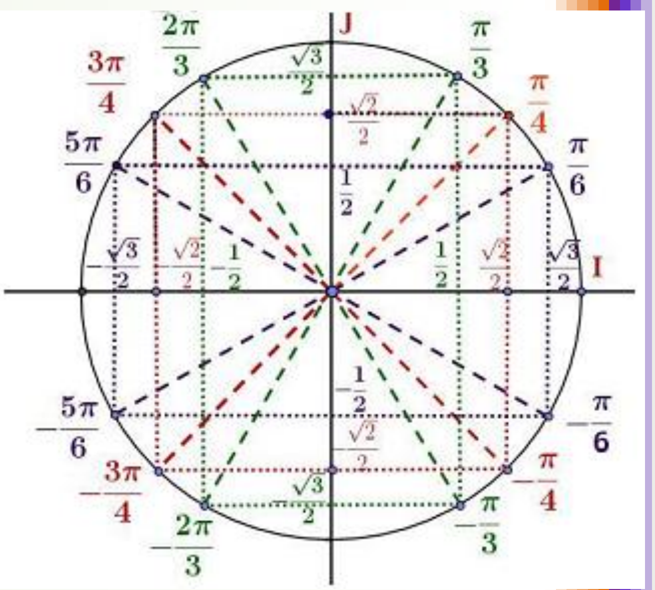
$[0;2\pi]$



J
I
0
O
π
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$
√3 /2
√2 /2
1/2
-1/2
-√2 /2
-√3 /2



y
x
(0, 1)
(1, 0)
(−1, 0)
(0, −1)
0°
30°
45°
60°
90°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°



J
I
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{6}$