Aspects énergétiques

Pour sc math et sc physique.

I-Travail de la tension d'un ressort:

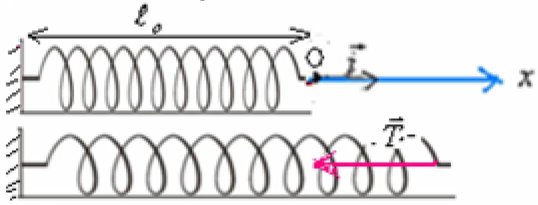
1) Travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne:

Le travail d'une force constante entre deux points A et B est égale au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.

$$W_{A \to B}\vec{F} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\widehat{\vec{F}.\overrightarrow{AB}})$$

2) Travail de la tension d'un ressort:

Considérons un ressort de longueur initiale ℓ_o et de constante de raideur K placé sur un plan horizontal comme l'indique la figure suivante:



La tension du ressort $\vec{T} = -K.x.\vec{i}$ n'est pas une force constante.

Pour calculer le travail de cette force on doit considerer le travail élémentaire de cette force δW sur un déplacement infiniment petit $\vec{\delta\ell}$ sur lequel nous considérerons que la force est constante $\delta W = \vec{T}.\vec{\delta\ell}$ avec : $\vec{\delta\ell} = \delta x.\vec{i}$

donc : $\delta W = \vec{F}.\vec{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\delta x.\vec{i} = -K.x..\delta x.$ d'où: $\delta W = -K.x..\delta x.$

Le travail total de la tension $\vec{T}$ du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point d'abscisse x_1 à un point d'abscisse x_2 est la somme des travaux élémentaires, on l'obtient en utilisant le calcul intégral on a donc : $dW = -K.x.dx.$

$$\Rightarrow W_{M_1 \to M_2}\vec{T} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x.dx = -K\int_{x_1}^{x_2} x.dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}.K(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

Donc le travail de la tension du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point M_1d'abscisse x_1 à un point M_2 d'abscisse x_2 est donné par la relation suivante :

$$W_{T1 \to T2}\vec{T} = \frac{1}{2}.K.(x_1^2 - x_2^2) \quad (1)$$

I-Etude énergétique du pendule élastique:

1)Energie potentielle de élastique:

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort, elle est donnée par la relation suivante: $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2 + C$

C: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle élastique .

x : allongement du ressort (en mètre)

E_{pe} : énergie potentielle élastique en (J).

En considérant comme état de référence $E_{pe}=0$ lorsque x=0 la constante C=0 donc : $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2$

Remarque : La variation de l'énergie potentielle ne dépend pas de l'état de référence. En effet:

-dans la position x_1 on a : $E_{pe_1} = \frac{1}{2}.K.x_1^2 + C$

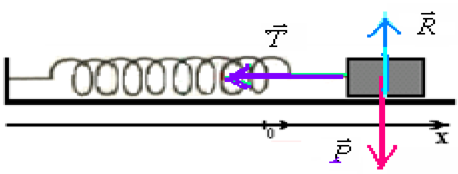
-dans la position x_2 on a : $E_{pe_2} = \frac{1}{2}.K.x_2^2 + C$

La variation de l'énergie potentielle $\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = \frac{1}{2}k\ (x_2^2 - x_1^2)$ (2)

D'après (1) et (2) on a: $\boxed{W_{1 \to 2}\vec{T} = -\Delta Epe}$

2) Conservation de l'énergie mécanique:

Pendant les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique horizontal constitué d'un corps S de masse m et d'un ressort de constante de raideur K, appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le corps S entre un point M_1d'abscisse x_1 à d'abscisse x_2 un point M_2 :



$\Delta_{1 \to 2} Ec = W_{1 \to 2}\vec{P} + W_{1 \to 2}\vec{R} + W_{1 \to 2}\vec{T}$ On a : $W_{1 \to 2}\vec{P} = 0$ et $W_{1 \to 2}\vec{R} = 0$ donc: $\Delta_{1 \to 2} Ec = W_{1 \to 2}\vec{T}$ or : $W_{1 \to 2}\vec{T} = -\Delta_{1 \to 2} Epe$

donc: $\Delta_{1 \to 2} Ec = -\Delta_{1 \to 2} Epe \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = -(Epe_2 - Epe_1) \Rightarrow Ec_2 - Ec_1 = Epe_1 - Epe_2$

$\Rightarrow \qquad Ec_2 + Ec_2 = Ec_1 + Epe_1$ d'où: $\qquad Em_2 = Em_1$ donc l'énergie mécanique est constante.

3 Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique:

Si les frottement sont négligeables , l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante : $E_m = C^{te}$ donc: $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$

Or : $E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}.m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.K.x^2$ donc: $\dfrac{dE_m}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.K.x^2) = 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{1}{2}.m.(2.\dot{x}.\ddot{x} + \frac{1}{2}.K.(2.x\dot{x}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}.(m.\ddot{x} + K.x) = 0$ d'où l'équation différentielle: $m.\ddot{x} + K.x = 0$

4) Expression de l'énergie mécanique du pendule élastique:

La solution de l'équation différentielle: $m.\ddot{x} + K.x = 0$ est : $x = x_m \cos(\dfrac{2.\pi}{T_o.}.t + \varphi)$ avec : $T_o = 2.\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

donc: $v = \dot{x} = -x_{m.}\dfrac{2\pi}{T_o}.\sin(\dfrac{2.\pi}{T_o}t + \varphi)$

$$E_m = E_{pt} + E_C = \frac{1}{2}K.x^2 + \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}.m.x_m^2\frac{4\pi^2}{T_o^2}\sin^2(\omega_o.t + \varphi) \text{ avec: } T_o^2 = \frac{4.\pi^2 m}{K}$$

$$\text{donc : } E_m = \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}\cancel{m}.x_m^2\frac{\cancel{4.\pi^2}.K}{\cancel{4.\pi^2 m}}\sin^2(\omega_o.t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\frac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi) + \frac{1}{2}.K.x_m^2\sin^2(\omega_o.t + \varphi) = \frac{1}{2}K.x_m^2\left[\cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \sin^2(\omega_o.t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}.K.x_m^2$$

5) Diagramme énergétiques :

a) Cas des oscillations sans frottements :

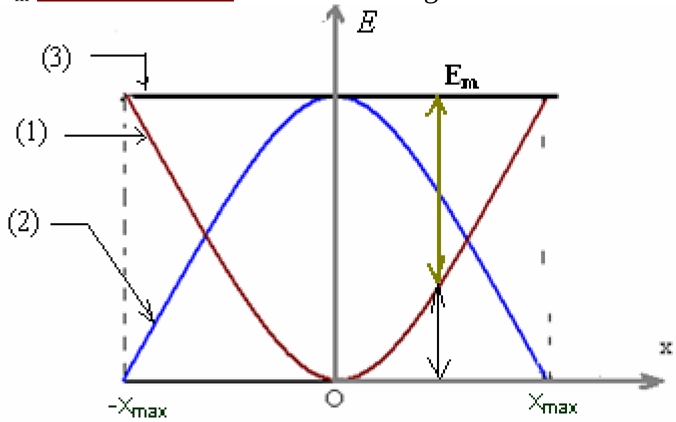
Dans le cas des oscillations sans frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique est constante.

$$E_m = \frac{1}{2}.K.x_m^2 = \frac{1}{2}.m.v_{max}^2 = C^{te}$$

En considérant comme état de référence $E_{pe}=0$ lorsque $x=0$ on a $C=0$ donc : $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2$

En représentant la variation E_{pe} ,E_c et E_m en fonction de x on obtient le diagramme suivant:

$E_m = C^{te}$

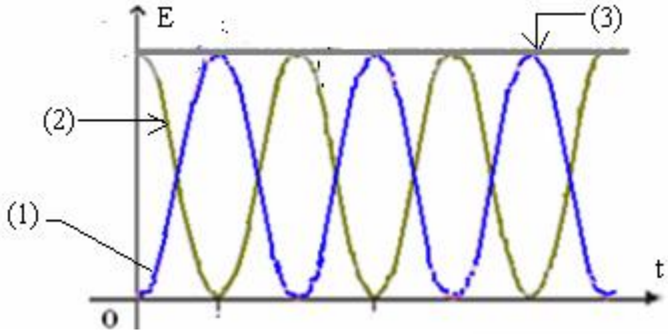


(1) Représente E_{pe}
(2) représente Ec.
(3) représente E_m .

A chaque instant on a ; $E_m=E_C+E_{pe}$ donc : $E_c=E_m-E_{pe}$

Et en représentant la variation de E_{pe} ,E_c et E_m en fonction du temps on obtient le diagramme suivant:

$E_m = C^{te}$



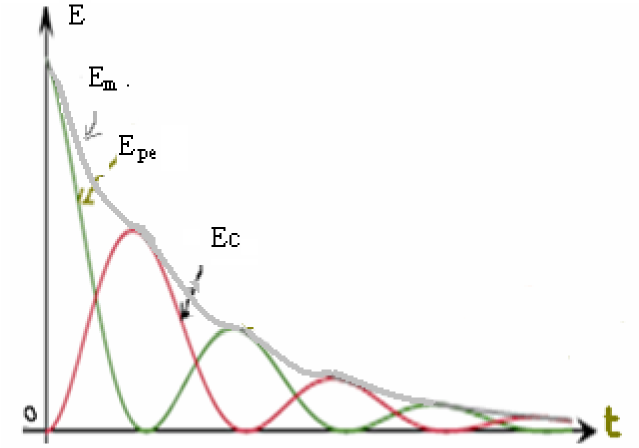
(2) Représente E_{pe}
(1) représente Ec.
(3) représente E_m .

Car: $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2$ avec: $x = x_m \cos(\dfrac{2.\pi}{T_o.}t + \varphi)$ donc: $E_{pe} = \frac{1}{2}K.x_m^2.\cos^2(\dfrac{2.\pi}{T_o}.t + \varphi)$

b) Cas des oscillations avec frottements :

Dans le cas des oscillations avec frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule.

Diagramme énergétique.:



II-Etude énergétique d'un pendule de torsion:

1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule de torsion est égale à l'énergie cinétique de la tige qui est donnée par l'expression suivante:

$Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$ J_Δ : est le moment d'inertie de la tige $\dot{\theta}$: est la vitesse angulaire . ,

2) Energie potentielle de torsion:

L'énergie potentielle de torsion est donnée par la la relation suivante: $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2 + C^{te}$

C^{te}: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion .

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque: $\theta = 0$ donc $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2$ la constante C=0

3) Energie mécanique du pendule de torsion:

L'énergie mécanique du pendule de torsion est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle de torsion.

$$E_m = E_c + E_{pe}$$

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, l'énergie mécanique du pendule de torsion s'écrit:

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$$

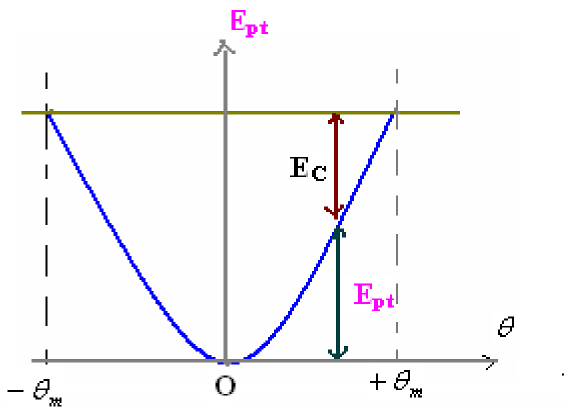
Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donc: $E_m = C^{te}$

Or : $E_m = E_c + E_p. = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$ donc: $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2) = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{2}.J_\Delta(2.\dot{\theta}.\frac{d\theta}{dt}) + \frac{1}{2}.C.(2.\theta.\frac{d\theta}{dt}) = 0 \Rightarrow J_\Delta.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + C.\theta.\dot{\theta} = 0$ d'où: $J_\Delta.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$ $\Rightarrow$ équation différentielle.

4) Diagramme énergétiques :

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, la constante C=0 donc: $E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2$



III-Etude énergétique du pendule pesant:

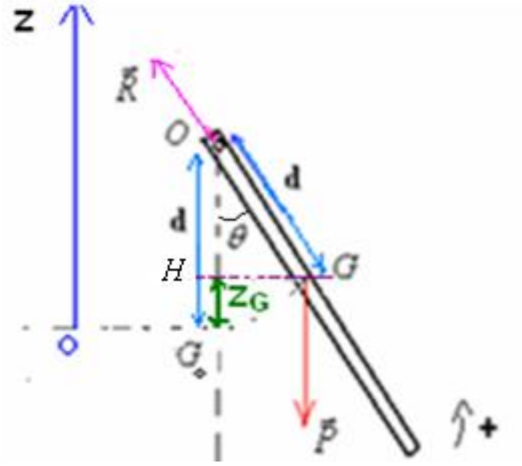
1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule pesant est: $Ec = \frac{1}{2}.J_{\Delta}.\dot{\theta}^2$

2) Energie potentielle de pesanteur:

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est : $E_{pp} = m.gz + C^{te}$

En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z = 0$ la constante C=0 donc: $E_{pp} = m.g.z$



Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle θ , son énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = m.gz_G$

$z_G = d - OH = d - d\cos\theta = d(1-\cos\theta)$ $\Rightarrow$ $E_{pp} = m.gd(1-\cos\theta)$ avec : $-\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$

donc pour : $\cos\theta = -1$ L'énergie potentielle de pesanteur est maximale : $E_{ppmax}=2.m.g.d$

On a deux cas possibles:

- Si $E_m > 2mgd$, l'énergie cinétique du système ne s'annule pas et le système se met à tourner sans arrêt et ce n'est pas un oscillateur mécanique.

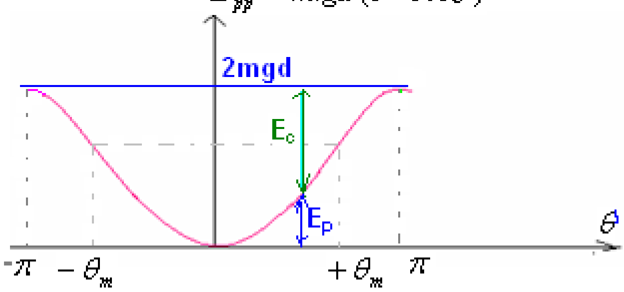
-Si $E_m < 2mgd$ l'énergie cinétique du système ne s'annule aux positions $\theta = \pm\theta_m$ et il oscille de façon périodique.

3) Energie mécanique du pendule pesant:

En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z = 0$, L'énergie mécanique du système :

$$E_m = Ec + E_{pp} = \frac{1}{2}J_{\Delta}.\dot{\theta}^2 + mgz$$

4) Diagramme énergétiques :



Pour les petites oscillations $\theta \leq 15°$ $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$ on peut écrire par approximation : $E_{pp} = \frac{m.gd.\theta^2}{2}$ dans ce cas on a: