L'ARITHMETIQUE

I) LA DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

1) Définition et conséquences

1.1 Diviseur d'un entier

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{a = kb}$;
On écrit : $\boldsymbol{b|a}$.
On dit que a est divisible par b

Exemples : $3/12$ car $12 = 3\times 4$ et $-6/42$ car $-42 = 7\times(-6)$ et on a :7 ne divise pas 16

Remarques :
- Si l'entier non nul b divise l'entier a alors $-b$ divise lui aussi.
- 1 divise tous les entiers relatifs
- 0 est divisible par tous les entiers non nuls : car $0 = 0 \times b$
- Si a est un entier les diviseurs de a constituent un ensemble fini noté D_a :

$D_a = \{b \in \mathbb{Z} / b|a\}$

Exemple :
$D_{18} = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
et $D_{18}^{+} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 :1) 156 a 12 diviseurs :
1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.
156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.
2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Propriété : $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$
- $1/a$ et $-1/a$ et a/a et $a/-a$
- $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- $a/b \Rightarrow a/b\times c$
- $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- $b|1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$

Déduction :
Si m et n sont deux entiers relatifs tels que : $mn = 1$ alors $|m| = 1$ et $|n| = 1$.

1.2 Multiple d'un entier.

Définition : On dit que a est un multiple de b si b est un diviseur de a

Remarque : Si b est un entier non nul, les multiples de b constituent Un ensemble infini noté $b\mathbb{Z}$
$b\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} / \ ; m = kb \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple :
$3\mathbb{Z} = \{\leftarrow \cdots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \rightarrow\}$

1.3 Diviseur commun, multiple commun de deux entiers

Définition :a) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n
b) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'.

Exemples :4 est un diviseur commun de 16 et 12
36 est un multiple commun de 9 et 12.

Propriété : Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les propositions suivantes :
- $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- $a|b$ et c|d⇒ ac|bd
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|$bc
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m + n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m - n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.
- $a/b \Rightarrow a^n/b^n \quad n \in \mathbb{N}$

Exercice02 :
1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$
a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c
b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c
c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$
2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$
Montrer que $a/19$
3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$
Montrer que $d/13$

Solution02 : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a / 2b+3c \\ a / b+c \end{cases} \Rightarrow a / 2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a / c$

1) c) $\begin{cases} a / x-y \\ a / b-c \end{cases} \Rightarrow a / bx-by \text{ et } a / by-cy \Rightarrow a / bx-cy$

2) $a / 12n+1$ et $a / -2n+3$

$\Rightarrow a / 12n+1 \text{ et } a / -12n+18 \Rightarrow a / 19$

$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d / n^2+3 et $d / 2n-1$

$\Rightarrow d / n^2+3 \text{ et } a / (2n-1)^2 \Rightarrow d / 4n^2+12 \text{ et } d / 4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d / 11+4n \text{ et } d / -2+4n \Rightarrow d / 13$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a / 5x-7 \\ a / 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a / 29$

Solution03 : $\begin{cases} a / 5x-7 \\ a / 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a / 2(5x-7)-5(2x+3)$

$a / 10x-14-10x-15 \Rightarrow a / -29 \Rightarrow a / 29$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$ **Solution04 :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc

$4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k'$??

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k+1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$

avec $k' = 4k+1$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2 / 3n+1$

Solution05 : $n+2 / 3n+1$ et $n+2 / n+2$

$n+2 / 3n+1$ et $n+2 / 3n+6$ donc

$n+2 / (3n+6)-(3n+1)$ donc $n+2 / 5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n+2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraine que

$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que que que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors $n+2 / 3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2 / 3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$ soit $n \neq -4$

On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraine que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x \succ y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution07 :a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S = \{(6;2); (9;7)\}$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S = \{(0;99); (2;19); (12;3)\}$

2) La division euclidienne

2.1 La division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Propriété : Considérons a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$; ils existent deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ où $0 \le r < b$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0,1, \dots , b - 1\}$.

Exemple1 :
la division euclidienne de 75 par 8 donne :
$75 = 9\times6+3$ car $0 \le 3 < 8$
la division euclidienne de 126 par 7 donne :
$126 = 18\times7+0$ car $0 \le 0 < 7$
la division euclidienne de 85 par 112
donne : $85 = 0\times112+85$ car $0 \le 85 < 112$

Exemple2 : Un entier naturel n peut s'écrire de l'une des façons suivantes
$n = 5k$ ou $n = 5k + 1$ ou $n = 5k + 2$
ou $n = 5k + 3$ ou $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice 08 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p \in \mathbb{N})$

Solution08 : $n \in \mathbb{N}$: $n = 25p + p^2$ et $0 \le p^2 \prec 25$
donc $0 \le p \prec 5$

Donc : $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases} ou \begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases} ou \begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases} ou \begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases} ou \begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc : $n \in \{0;26;54;84;116\}$

Exercice 09: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution09 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :
$n = aq + r$ et $0 \le r \le a-1$ et on a : $q = bq' + r'$
et $0 \le r' \le b-1$ donc on déduit que :
$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \le r' \le b-1$ et $0 \le r \le a-1$ alors :
$ar' + r \le ab - 1$ donc $n = abq' + ar' + r$
$0 \le ar' + r \le b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

2.2 La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r
Tels que : $a = bq + r$ où $0 \le r < |b|$

Exemple1 :1)la division euclidienne de 37 par -11 donne : $37 = (-11)\times(-3)+4$ car $0 \le 4 < 11$

2)a division euclidienne de -37 par 11
donne : $-37 = 11\times(-4)+7$ car $0 \le 7 < 11$

3) l a division euclidienne de -37 par -11
donne : $-37 = (-11)\times4+7$ car $0 \le 7 < 11$

Exercice10: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$
si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution10 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :
$a - 1 = bq + r$ et $0 \le r \prec b$

Donc : $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$

On montre que : $0 \le (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$???

On a : $0 \le r \prec b$ donc $0 \le r+1 \le b$
donc $0 \le (r+1)b^9 \le b^{10}$ donc $0 \le (r+1)b^9 - 1 \le b^{10} - 1$
donc $0 \le (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$
conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

II) LES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Définitions : a) On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a
Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$
b) On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarques :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et |p|.
- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même
  - p n'admet pas de diviseurs effectif d'où :
  - -p est aussi premier ;
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété : Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de $\boldsymbol{a}$ diffèrent de 1 est un nombre premier

Exemple1 : Les nombres -3 et -7 et 23 sont premiers.

2) Détermination d'un nombre premier

Propriété : Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \le n$.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire : Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \le n$ alors n est premier.

Exercice: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n \quad n\in\mathbb{N}$

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

III) PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN, PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN.

1) Plus grand diviseurs commun

1.1 Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre d est **le plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres.

On note $d = PGDC\ (a, b) = a \wedge b$

Exemple :

$-48 \wedge 36 = 12$

Propriétés :1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$

3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

4) Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$

5)si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\ (a \wedge b)$

Exercice11 : montrer que $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a\wedge(a+1)=1$

Solution11 : on pose $d=a\wedge(a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

Exercice12 : $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$

1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

Solution12 :1)on pose $d=A\wedge B$ et $d'=(n+2)\wedge 7$

On a : $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3=(n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2 \Rightarrow d/(n+2)\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d'=(n+2)\wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A\wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d\in\mathbb{N}$ et $d'\in\mathbb{N}$ donc

donc $d=d'$ donc : $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A\wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2\in\{1;7\}$ ce qui entraine que $n=5$

Définition : On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Exemple :21 et 10 sont premiers entre eux.

Exercice 13: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution13 :1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

Exercice14 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$ montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution14 :1)on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d / A$ et $d / B \Rightarrow d / 35a + 57$ et $d / 45a + 76$

$\Rightarrow d / 9(35a + 57)$ et $d / 7(45a + 76)$

$\Rightarrow d / 315a + 513$ et $d / 315a + 532$

$\Rightarrow d / 19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1; 19\}$ ce qui entraine que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

1.2 L'algorithme d'Euclide.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$
Où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Propriété : Soient a et b deux entier naturels non nuls.Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :
1- Trouver le $PGDC$ (362154, 82350).
2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

Propriété : Soient a et b deux entier relatifs non nuls
Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Exercice : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$

3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

2) Le plus petit multiple commun.

Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre entier naturel m est **le plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque
m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Exemple :$-48 \wedge 36 = 144$

Propriétés :
1) $a \vee a = |a|$ 2) $a \vee b = b \vee a$
3) $a \vee 1 = |a|$ 4) Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$
5) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
6) $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs.
Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

Indications pour preuve :
Poser $M = qm + r$ on a : $a|m$, $a|M$ conclure.
De même pour b et si $r \neq 0$ aboutir à une contradiction.

IV) LA CONGRUENCE MODULO n

1) Définition et propriétés.

Activité : Quelle relation y a-t-il entre ces nombres −11, 15, 67, 28, 132 et 13.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul. On dit que : $\boldsymbol{a}$ est congrue à $\boldsymbol{b}$ modulo $\boldsymbol{n}$ si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$.
On écrit : $\boldsymbol{a \equiv b\ [n]}$

Exemples :122 ≡ 27 [5] 34 ≡ 13 [7]

Propriété : Si $a \equiv b\ [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :
1) $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a\ [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive.
2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\ a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b \equiv a\ [n]\ )$: on dit que la relation de congruence est symétrique.
3) $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$
$(a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n] \Rightarrow a \equiv c\ [n])$: on dit que la relation de congruence est transitive.

Définition : Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

2) Compatibilité de la relation d'équivalence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors :
1) $a + c \equiv b + d\ [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$
2) $ac \equiv bd\ [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire : Si $a \equiv b\ [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k\ [n]$

Remarque : La réciproque du corolaire n'est pas vraie : $2^4 \equiv 3^4\ [5]$ mais $2 \not\equiv 3\ [5]$

Exercice15 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19
Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a + b$ 2) $a^2 + b^2$ 3) $2a - 5b$

Solution15 : 1)On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a + b \equiv 17 + 15[19] \Leftrightarrow a + b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a + b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv 17[19]\Rightarrow a^2\equiv 17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv 4[19]$

$b\equiv 15[19]\Rightarrow b^2\equiv 15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2\equiv 4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a\equiv 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 2\times 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 15[19]$ **(1)**

$b\equiv 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 5\times 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 18[19]$

Donc : $5b\equiv -1[19]\Rightarrow -5b\equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$2a-5b\equiv 15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice16 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2\equiv 0[10]$

Solution16 :1) $3^n\equiv r[10]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0\equiv 1[10]$ et $3^1\equiv 3[10]$ et $3^2\equiv 9[10]$

et $3^3\equiv 7[10]$ et $3^4\equiv 1[10]$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

On a : $3^4\equiv 1[10]$ donc : $\left(3^4\right)^k\equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k}\equiv 1[10]$ et $3^{4k+1}\equiv 3[10]$ et $3^{4k+2}\equiv 9[7]$

et $3^{4k+3}\equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10

cad : on cherche r tel que : $2019^{2020}\equiv r[10]$??

On a : $2019=2010+9$ donc : $2019\equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020}\equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040=4\times 1010=4\times k$

donc : $2019^{2020}\equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode **:** $2019\equiv 9[10]$

donc : $2019\equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv 1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
3^n+5n+2	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n+5n+2\equiv 0[10]\Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice17 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Solution17 :1)on a : $(n+2)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$(n+2)^{n+2}=C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2}+C_{n+2}^1 n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

$(n+2)^{n+2}=2^{n+2}+(n+2)n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc : $(n+2)^{n+2}=2^{n+1}\left(2+n^2+2n\right)+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+2n)+2^{n+1}n^2+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(1+n)=n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)\equiv 0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$

2) on a : $7\equiv 7[10]$ et $7^2\equiv -1[10]$ donc $7^4\equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv 1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv 7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv 9[10]$

$7^{4k+3}\equiv 3[10]$

On aussi : $7\equiv 3[4]$ et $7^2\equiv 1[4]$

Donc $7^{2k}\equiv 1[4]$ et $7^{2k+1}\equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Exercice 18 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3+n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7

6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 6

Exercice19 : $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$

1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a)montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$
b)en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$
c)montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
d)en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution19 :1)on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
$d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b
Car il divise toute combinaison de x et y
$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$
Inversement :
$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$
$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$
$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d = d'$
2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2+5n+13$ et $b = n+3$
a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?
la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$
donne : $n^2+5n+13 = (n+3)(n+2)+7$
Donc : $a = b(n+2)+7 \Leftrightarrow a - b(n+2) = 7$
on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
$d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b
$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$
$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b
$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d = d'$
b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??
on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$
donc : $d/7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$
c)montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n+3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$
d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4
$n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$
ou $n \equiv 6[7]$

3) Les classes d'équivalences.

3.1 Définition et propriété :

Activité : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui admettent 2 pour reste de la division par 7.

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle **la classe d'équivalence de** r et se note : $\overline{r}$ = $\{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r\ [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : Pour $n = 7$ les restes possibles sont les éléments de l'ensemble :{0,1,2,3,4,5,6}
Donc on peut définir les classes d'équivalences suivantes :
$\overline{0} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 0\ [7]\}$
$\overline{1} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 1\ [7]\}$ et …
$\overline{6} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 6\ [7]\}$
on remarquer que $\overline{0} = \overline{7}$
Les classes d'équivalences modulo 7 constituent :un ensemble noté :
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$

Généralisation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};...;\overline{n-1}\}$

3.2 Les opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les deux lois :
1) **L'addition :** On pose $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}$
2) **La multiplication :** On pose : $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$

Exemple : Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{3} \times \overline{4} = \overline{0}$ et $\overline{5}+\overline{4} = \overline{3}$

Exercice20: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\overline{2}x = \overline{3}$ 2) $x^2 + \overline{3}x = \overline{0}$
3) $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$

Solution20 : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3}\}$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions
Donc : $S = \varnothing$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$x^2+\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
$\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont solutions de l'équation
Donc : $S = \{\overline{0};\overline{1}\}$

2) $\overline{2013}x^3+\overline{2}x=\overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3+\overline{2}x=\overline{k} \Leftrightarrow x^3+\overline{2}x=\overline{k}$

Car : $2013=503\times 4+1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3+\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Si $\overline{k}=\overline{0}$: $S=\left\{\overline{0};\overline{2}\right\}$ Si $\overline{k}=\overline{1}$: $S=\left\{\overline{3}\right\}$

Si $\overline{k}=\overline{2}$: $S=\varnothing$ Si $\overline{k}=\overline{3}$: $S=\left\{\overline{1}\right\}$

Exercice21 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\overline{3}y=\overline{1}$

Solution21 :on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\right\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$S=\left\{\left(\overline{0};\overline{2}\right);\left(\overline{1};\overline{0}\right);\left(\overline{2};\overline{3}\right);\left(\overline{3};\overline{1}\right);\left(\overline{4};\overline{3}\right);\left(\overline{4};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice22 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

Solution22 :

$$\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\overline{3}+\overline{2}\right)x+\left(\overline{2}+\overline{4}\right)y=\overline{3}+\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\overline{4}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\overline{1}\\ y=\overline{4}\end{cases}$$ donc $S=\left\{\left(\overline{1};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice : 1) Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :

a) $\overline{2}x-\overline{1}=\overline{0}$ b) $\overline{4}x+\overline{1}=x+\overline{3}$

c) $\overline{5}x^2+\overline{3}x+\overline{1}=\overline{0}$

Propriété : Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

$(\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0} \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{0}$ ou $\overline{b}=\overline{0})$

Preuve : Après la décomposition.

IV) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Activité : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 24816

Théorème :

a)Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

b) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers
comme suite :

$$m=\varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon\in\{-1,1\}$

Propriété 1: Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a=\varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$$d=\varepsilon\, p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times p_3^{\beta_3}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\beta_k}$$ δn où

$(\forall i\in [\![1,n]\!])(0\leq \beta_i \leq \alpha_i)$

δn un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δi est $\alpha i+1$

On en déduit que :

Propriété 2 :

$$a=\varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de a est : $2\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right)\ldots\left(\alpha_n+1\right)$

Exercice :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 : Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a=\varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

un entier m est un multiple de a si et seulement si $m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times ... \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$

où ($\forall i \in [\![1, n]\!]$)($\alpha_i \leq \beta_i$)

2) Application de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels

1) Le plus grand entier n qui vérifie :
$n \leq a$ et $n \leq b$ est inf (a, b)

2) Le plus petit entier n qui vérifie :
$n \geq a$ et $n \geq b$ est sup (a, b)

Exemple : $a = 7$ et $b = 10$

Le plus grand des entiers n tel que :
$n \leq 7$ et $n \leq 10$ est : $7 = \inf(10,7)$

Le plus petit des entiers n tel que :
$n \geq 7$ et $n \geq 10$ est $10 = \sup(10,7)$

2.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ;le $P.G.D.C$ (a, b) est l'entier

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k;\beta_k)}$$

Remarque : Soient a et b deux entiers relatifs on a : $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

Exemple : Déterminer : $(-5664) \wedge (-984)$ et $324 \wedge (-144)$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

2.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le ppmc (a, b) est l'entier

$$a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k;\beta_k)}$$

Exemple :déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$ et $m = 8316 \vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ et $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108$ et

$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$

2.3 Applications de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

1) $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

2) $ca \vee cb = c(a \vee b)$

3) $ca \wedge cb = c(a \wedge b$

Exemple :si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$ déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

donc : $a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12|/2 = 6$

Exercice23: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ $(n \in \mathbb{N})$

Solution23 :

$a = \left((5^n)^2 - 1\right)\left((6^n)^2 - 1\right) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$

$a = b(5^n + 1)(6^n + 1)$ donc : b / a donc : $a \vee b = a$

V) Exercices avec solutions

Exercice24: n et a et b des entiers naturels

Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$n = aq + r$ et $0 \leq r \leq a - 1$ et on a : $q = bq' + r'$ et $0 \leq r' \leq b - 1$ donc on déduit que :

$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b - 1$ et $0 \leq r \leq a - 1$ alors : $ar' + r \leq ab - 1$ donc $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r \leq b - 1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice25: Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution25 :on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

donc : $19^4 \equiv 2[7]$ donc $19^{52} \equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23 \equiv 2[7]$ donc $23^{41} \equiv 2^{41}[7]$ donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$

donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7]$ donc

$23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$

et puisque : $8 \equiv 1[7]$ donc $23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$

conclusion :1est le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice26: $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=4^n-3n-1$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad U_{n+1}=4U_n+9n$

2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Solution26 :1)on a $U_{n+1}=4^{n+1}-3(n+1)-1$

donc $U_{n+1}=4\times4^n-3n-3-1$

et puisque : $U_n=4^n-3n-1$ donc :

$4^n=U_n+3n+1$ donc : $U_{n+1}=4U_n+9n$

2) notons P(n) La proposition suivante : « 9 divise U_n » .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $U_0=4^0-3\times0-1=0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1}\equiv0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence: « 9 divise U_n » donc $U_n\equiv0[9]$ donc $4U_n\equiv0[9]$

Et on a : $9n_n\equiv0[9]$ donc $U_n+9n_n\equiv0[9]$ donc $U_{n+1}\equiv0[9]$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise 4^n-3n-1

Exercice27: 1)Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation: $\bar{4}x-\bar{3}=\bar{0}$

2) Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ le système suivant :

$$\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$$

3)Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation: $x^2-x-\bar{2}=\bar{0}$

Solution27 :1)on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{4}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{4}x-\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ est la seul solution de l'équation

Donc : $S=\{\bar{2}\}$

2): $\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\bar{3}+\bar{2})x+(\bar{2}+\bar{4})y=\bar{3}+\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$

$\begin{cases}y=\bar{4}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\bar{1}\\ y=\bar{4}\end{cases}$ donc $S=\{(\bar{1};\bar{4})\}$

3)on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2-x-\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S=\{\bar{2};\bar{4}\}$

Exercice28: $n\in\mathbb{Z}$ on pose $\alpha_n=n^4-n^2+16$

1)montrer que n^2-3n+4 et n^2+3n+4 sont des nombres paires

2) En déduire que α_n n'est pas un nombre premier

Solution28 :1)soit $n\in\mathbb{Z}$

$n^2-3n+4\equiv n^2-n[2]$ donc

$n^2-3n+4\equiv n(n-1)[2]$

Or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n-1)\equiv0[2]$ donc $n^2-3n+4\equiv0[2]$

donc n^2-3n+4 est un nombre paire

et on a : $n^2+3n+4\equiv n^2+n[2]$ donc

$n^2+3n+4\equiv n(n+1)[2]$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n+1)\equiv0[2]$ donc $n^2+3n+4\equiv0[2]$

donc n^2+3n+4 est un nombre paire

2)

$\alpha_n=n^4-n^2+16=(n^2+4)^2-9n^2=(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$

Et puisque n^2-3n+4 et n^2+3n+4 sont des nombres paire

alors : $n^2-3n+4\neq1$ et $n^2+3n+4\neq1$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice29: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution29 : 1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

Exercice30: $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\geq 3$ et a est impair On pose : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

1) a)montrer que $2^{ab}\equiv 1[d]$

b)montrer que $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d\in\{1;2\}$

3)montrer que $d=1$

Solution31 : 1) a)montrons que $2^{ab}\equiv 1[d]$

On a : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

Donc il existent : $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et $\beta\in\mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a-1=d\alpha$ et $2^b+1=d\beta$ donc :

$2^{ab}=(2^a)^b=(d\alpha+1)^b$

Et on a : $d\alpha+1\equiv 1[d]$ Donc $(d\alpha+1)^b\equiv 1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv 1[d]$

1) a)montrons que $2^{ab}\equiv -1[d]$

On a : $2^{ab}=(2^b)^a=(d\beta-1)^a$

Et on a : $d\beta-11\equiv -1[d]$ Donc $(d\beta-1)^a\equiv(-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta-1)^a\equiv -1[d]$

Par suite : $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) $d\in\{1;2\}$???

on a : $2^{ab}\equiv 1[d]$ et $2^{ab}\equiv -1[d]$ donc $0\equiv 2[d]$

donc $d/2$ et on a $d\in\mathbb{N}^*$ donc $d\in\{1;2\}$

3)montrons que $d=1$

On a : 2^a-1 et 2^b-1 sont impairs donc d est impair

Et puisque $d\in\{1;2\}$ donc $d=1$

Exercice32 :

1)a) montrer que : $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2)montrer que $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)montrer que $5/1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}$

Solution33 : 1) a)on a : $2^4\equiv 1[5]$ donc

$(2^4)^k\equiv 1^k[5]$ donc $2^{4k}\equiv 1[5]$ donc $2^{4k}\times 2^r\equiv 2^r[5]$

Donc $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b) $2^n\equiv r[5]$ et $r\in\{0;1;2;3;4\}$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

donc : $2^{4k}\equiv 1[5]$ et $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ et $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ et $2^{4k+3}\equiv 3[5]$

2)montrons que $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$?

on a : $17\equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2}\equiv 2^{4p+2}[5]$

$32^{4p+3}\equiv -2^{4p+3}[5]$ $17^{4p+2}\equiv 4[5]$

on a : $32\equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3}\equiv 2^{4p+3}[5]$

donc : $32^{4p+3}\equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3}\equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 4+3+3[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 0[5]$

donc $5/17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)

on a : $1\equiv 1[5]$ et $2\equiv 2[5]$ et $3\equiv -2[5]$ et $4\equiv -1[5]$

donc : $1^{2006}\equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006}\equiv 2^{2006}[5]$ et $3^{2006}\equiv(-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006}\equiv(-1)^{2006}[5]$

donc ; $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2\times 2^{2006}[5]$

$1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2^{2007}[5]$

Or : $2007=4\times 501+3$ donc : $2^{2007}\equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+3[5]\equiv 0[5]$

Exercice34 : déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution34 :1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}}[10]$ et puisque 2020^{2021}

Est paire donc : $2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987 \equiv 7[10]$ donc $1987^2 \equiv 9[10]$

Et $1987^3 \equiv 3[10]$ et $1987^4 \equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k} \equiv 1[10]$ et $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$ et

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$

$1991^{1983} \equiv ?[4]$

$1991 \equiv 3[4]$ et $1991^2 \equiv 1[4]$

on a : $1983 \equiv 1[2]$ donc : $1991^{1983} \equiv 3[4]$

donc : $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

Exercice35 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel montrer que : $N \equiv a-b+c-d[11]$

Solution35 :on a :

$N = \overline{dcba} = a + b\times10 + c\times10^2 + d\times10^3$

et on a : $10 \equiv -1[11]$ et $10^2 \equiv 1[11]$ et $10^3 \equiv -1[11]$

Donc : $N \equiv a-b+c-d[11]$

Exercice36 :

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution36 :1)

(1) $67 = 1\times39 + \boxed{28}$ **(2)** $39 = 1\times28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2\times11 + \boxed{6}$ **(4)** $11 = 1\times6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1\times5 + \boxed{1}$ **(6)** $5 = 1\times5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6 = 1\times5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1\times5 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 6 - 1\times(11 - 1\times6) = \boxed{1} \Rightarrow 2\times6 - 1\times11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28 - 2\times11) - 1\times11 = \boxed{1} \Rightarrow 2\times28 - 5\times11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times28 - 5\times(39 - 1\times28) = \boxed{1} \Rightarrow 7\times28 - 5\times39 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67 - 1\times39) - 5\times39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7\times67 - 12\times39 = \boxed{1}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien