الدرس ④ : معادلة مستقيم

I - المعادلة المختصرة لمستقيم:

1) تعريف:

المعادلة المختصرة لمستقيم (D) هي $y = mx + p$
العدد m يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (D)
العدد p يسمى الأرتوب عند الأصل.

2) أمثلة:

أ- مثال ①

(D): $y = 2x - 3$ هي معادلة مختصرة
للمستقيم (D) الذي ميله $m = 2$ والأرتوب عند الأصل $p = -3$

(Δ): $y = -x$ هي معادلة مختصرة للمستقيم (Δ)
الذي ميله $m = -1$ والأرتوب عند الأصل $p = 0$.

ب- مثال ②

(D): $2y + 3x - 1 = 0$ نعبر المستقيم

نعزل y لدينا: $2y + 3x - 1 = 0$

إذن: $2y = -3x + 1$

$y = \frac{-3x+1}{2}$

(D): $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

وهي المعادلة المختصرة للمستقيم (D) الذي ميله $m = -\frac{3}{2}$ والأرتوب عند الأصل $p = \frac{1}{2}$

ج- مثال ③: إنشاء مستقيم معرف بمعادلته

(D): $y = -2x + 3$ نعبر المستقيم

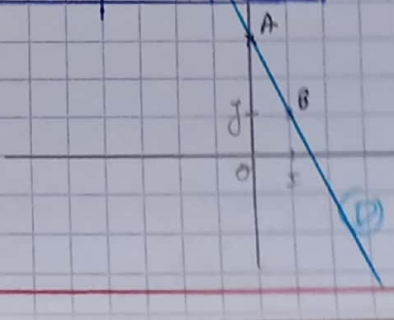
لإنشاء المستقيم (D) يكفي تحديد نقطتين مختلفتين منه

نأخذ مثلا $x = 0$ إذا $y = -2 \times 0 + 3 = 3$

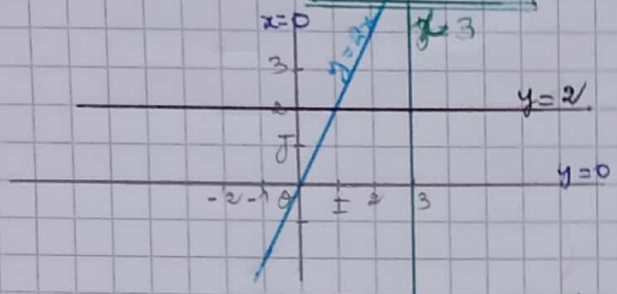
و $x = 1$ إذا $y = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$

x	0	1
y	3	1
$M(x,y)$	$A(0,3)$	$B(1,1)$

لإنشاء المستقيم (D) نستعين بالجدول جانبه



3) حالات خاصة



* معادلة محور الأفاصيل هي $y = 0$
* معادلة محور الأراتيب هي: $x = 0$
* معادلة المستقيم المار من أصل المعلم تكتب على الشكل $y = mx$ (الأرتوب عند الأصل منعدم)
* معادلة المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل (الأفقي) والمار من النقطة $M(a,b)$ هي $y = b$
* معادلة المستقيم الموازي لمحور الأراتيب (العمودي) والمار من النقطة $M(a,b)$ هي $x = a$

4) ملاحظات:

1) كل نقطة M إحداثياها تحققان معادلة مستقيم (D) تنتمي لهذا المستقيم

مثلا: نعبر $A(2,1)$ و (D): $y = 2x - 3$

لدينا: $2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$ إذن $A \in (D)$

2) نعتبر النقطتين $A(a, y_A)$ و $B(a, y_B)$
معادلة المستقيم (AB): $x = a$: هي (AB)

3) نعتبر النقطتين $A(x_A, b)$ و $B(x_B, b)$
معادلة المستقيم (AB): $y = b$: هي (AB)

II - تحديد معادلة مستقيم:

1) ميل مستقيم معرف بنقطتين:

أ- خاصية ①:

إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتين بحيث $x_A \neq x_B$
فإن ميل المستقيم (AB) هو $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

ملاحظة:

$$m = \frac{\text{فرق الأراتيب}}{\text{فرق الأفاصيل}}$$

مع الحفاظ على الترتيب

III - توازي و تعامد مستقيمين :

1) شرط توازي مستقيمين :

أ - خاصية ② :

* ليكن (D) و (Δ) مستقيمين بحيث :

$(D): y = mx + p$ و $(\Delta): y = m'x + p'$

$(D) // (\Delta)$ يعني أن $m = m'$

* بتعبير آخر :

✓ يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل

✓ إذا كان مستقيمين غير متوازيين ، فإنهما متقاطعان.

ب - مثال :

نعتبر المستقيمين $(D_1): y = -2x + 1$ و $(D_2): y = -2x + 5$

لدينا : $(D_1) // (D_2)$ لأن لهما نفس الميل -2

ج - تحديد تطبيقي :

نعتبر المستقيم (D) بحيث : $(D): y = 2x - 1$

1) هل النقطة $A(-1,2) \in (D)$ ؟

2) أوجد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من A و الموازي لـ (D)

الحل :

1) لدينا : $2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq 2$

إذن : $A \notin (D)$

2) المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على الشكل : $(\Delta): y = mx + p$

بما أن $(\Delta) // (D)$ فإن لهما نفس الميل

إذن : $m = 2$

إذن : $(\Delta): y = 2x + p$

* لتحديد p

لدينا : $A \in (\Delta)$

إذن : $y_A = 2x_A + p$

$2 = 2 \times (-1) + p$

$2 = -2 + p$

$p = 2 + 2 = 4$

وبالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي

$$\boxed{(\Delta): y = 2x + 4}$$

ب - مثال :

نعتبر $A(-1,-3)$ و $B(-4,0)$

ميل المستقيم (AB) هو : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-3)}{-4-(-1)} = \frac{3}{-3} \Rightarrow \boxed{m = -1}$

2) تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بنقطتين :

لتحديد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث :

$A(1;-2)$ و $B(-2;3)$

* المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على الشكل : $(AB): y = mx + p$

* تحديد m

لدينا : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-2)}{-2-1} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

إذن : $(AB): y = -\frac{5}{3}x + p$

* تحديد p

لدينا : $A \in (AB)$

إذن :

$y_A = -\frac{5}{3}x_A + p$

$-2 = -\frac{5}{3} \times (1) + p$

$-2 = -\frac{5}{3} + p$

$p = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6+5}{3} = -\frac{1}{3}$

وبالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي :

$$\boxed{(AB): y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}}$$

3) تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم يمر من نقطة و يوازي مستقيما معلوما

لتحديد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) الذي ميله 3 و يمر من النقطة $E(2;-1)$

* لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على الشكل : $(\Delta): y = 3x + p$

* تحديد p

لدينا : $E \in (\Delta)$

إذن : $y_E = 3x_E + p$

$-1 = 3 \times 2 + p \Rightarrow -1 = 6 + p$

$p = -1 - 6 = -7$

وبالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي :

$$\boxed{(\Delta): y = 3x - 7}$$

2) شرط تعامد مستقيمين :

أ- خاصية ③ :

+ نعتبر المستقيمين $(D): y=mx+p$ و $(D'): y=m'x+p'$

. $(D) \perp (\Delta)$ يعني أن $m \times m' = -1$

+ بتعبير آخر

✓ يكون مستقيمان متعامدان إذا كان جداء معاملي توجيههما يساوي -1

✓ إذا كان جداء معاملي توجيه مستقيمين يساوي -1، فهما متعامدان.

ب- مثال :

نعتبر المستقيمين :

$(D): y=-\frac{2}{3}x+1$ و $(D'): 2y-3x+8=0$

لدينا : $2y-3x+8=0$

إذن : $2y=3x-8$

$y=\frac{3x-8}{2}$

(D') $y=\frac{3}{2}x-4$ إذن :

لدينا : $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=-1$

إذن : $(D) \perp (D')$

ج- تمرين تطبيقي :

نعتبر المستقيم : $(D): y=-4x+3$

1) بين أن : $A(0;-1) \notin (D)$

2) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على (D)

3) نعتبر المستقيم $(D'): x-4y-1=0$ ، بين أن : $(D) \perp (D')$

الحل :

1) لدينا : $-4\times 0+3=0+3=3 \neq -1$

إذن : $A \notin (D)$

2) المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على الشكل : $(\Delta): y=mx+p$

+ تحديد m

لدينا : $(\Delta) \perp (D)$

إذن : $m\times(-4)=-1$

$m=\frac{1}{4}$

إذن : $(\Delta): y=\frac{1}{4}x+p$

+ تحديد p

لدينا : $A \in (\Delta)$

إذن : $y_A=\frac{1}{4}x_A+p$

$-1=\frac{1}{4}\times 0+p$

$p=-1$

وعليه فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي :

$$\boxed{(\Delta): y=\frac{1}{4}x-1}$$

3) لدينا : $(D'): x-4y-1=0$

إذن : $-4y=-x+1$

$y=\frac{-x+1}{-4}$

وعليه (D') $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

وبالتالي : $\frac{1}{4}\times(-4)=-1$

فإن : $(D) \perp (D')$

ملاحظة :

نعتبر النقطتين $A(1;1)$ و $B(2;-1)$

بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي :

$(AB): y=-2x+3$

+ طريقة ① : تحديد الميل والارتوب عند الأصل .

+ طريقة ② : التخمين (وهي الأفضل) لأنه أعطانا المعادلة :

لدينا : $-2x_A+3=-2\times 1+3=-2+3=1=y_A$

$-2x_B+3=-2\times 2+(-1)=-4-1=-5=y_B$

إذن A و B تحققان المعادلة $y=-2x+3$

وبالتالي فإن : $(AB): y=-2x+3$