الدرس 5: مبرهنة فيثاغورس

I - مبرهنة فيثاغورس المباشرة:

1) نشاط 1:

ABC مثلث حيث أن: $AB=3cm$ ، $AC=4cm$ ، $BC=5cm$

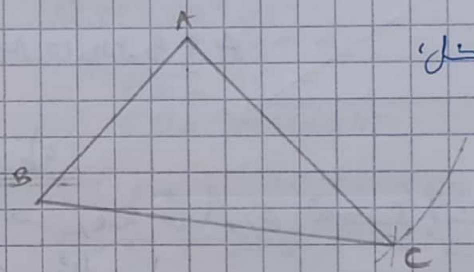
1) أ- أنشئ المثلث ABC

ب- ماذا تلاحظ عن طبيعة المثلث ABC؟

2) بين أن: $BC^2=AB^2+AC^2$

جواب:

1) أ- الشكل:



ب- باستعمال الكوس، نجد أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A

2) لدينا: $AB^2+AC^2=3^2+4^2=9+16=25$

و $BC^2=5^2=25$

إذن: $BC^2=AB^2+AC^2$

2) مبرهنة فيثاغورس المباشرة:

أ- خاصية 1:

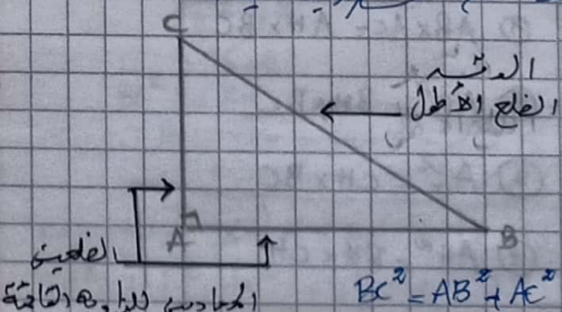
إذا كان مثلث قائم الزاوية، فإن مربع وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

أي إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A فإن:

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2}$$

* الشكل الهندسي:

ABC مثلث قائم الزاوية في A



إذن: $BC^2=AB^2+AC^2$

ب- ملاحظة:

* ABC مثلث قائم الزاوية في A إذن: $BC^2=AB^2+AC^2$

أي أن: $\begin{cases} AB^2=BC^2-AC^2 \\ AC^2=BC^2-AB^2 \end{cases}$

* تستعمل مبرهنة فيثاغورس المباشرة لحساب الأطوال.

ج- مثال:

EFG مثلث قائم الزاوية في E حيث: $EF=5$ و $EG=3$ ، حدد FG

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن:

$$FG^2=EF^2+EG^2$$
$$=3^2+5^2$$
$$=9+25$$
$$FG^2=34$$

إذن: $\boxed{FG=\sqrt{34}}$

3) تمرين تطبيقي:

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث $AB=4cm$. لتكن M منتصف $[BC]$

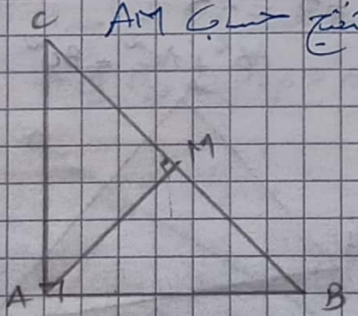
1) أنشئ الشكل

2) احسب BC

3) استنتج حساب AM

الحل:

1) الشكل



2) لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن:

$$BC^2=AB^2+AC^2$$
$$=4^2+4^2$$
$$=16+16$$
$$BC^2=32$$

أي أن: $BC=\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=4\sqrt{2}$

3) لدينا ABC مثلث متساوي الساقين في A
ولدينا M منتصف $[BC]$
إذن (AM) هو واسط القطعة $[BC]$ أي أن $(AM) \perp (BC)$
وهذا يعني أن المثلث AMB قائم الزاوية في M
M منتصف $[BC]$ إذن:

$$BM = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

لدينا AMB مثلث قائم الزاوية في M إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$
$$4^2 = AM^2 + (2\sqrt{2})^2$$
$$16 = AM^2 + 8$$
$$AM^2 = 16 - 8 = 8$$
$$AM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ثالثا - مبرهنة فيتاغورس العكسية:

1) نشاط 2:

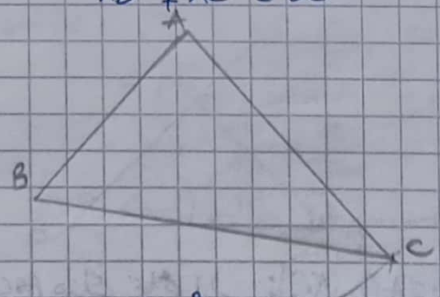
ABC مثلث حيث: $AB=3cm$ و $AC=4cm$ و $BC=5cm$

1) قارن AB^2+AC^2 و BC^2
2) أنشئ المثلث ABC
3) ما طبيعة المثلث ABC؟ تحقق بأداة هندسية مناسبة
4) ما هي الخاصية التي تستنتجها مما سبق؟

الحل:

1) لدينا: $AB^2+AC^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$
و $BC^2 = 5^2 = 25$
إذن: $AB^2+AC^2 = BC^2$

2)



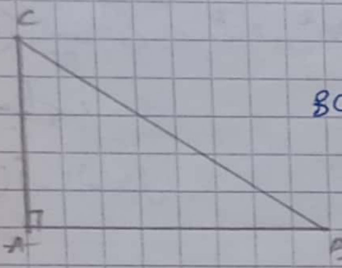
3) باستعمال الكوس نجد أن المثلث ABC قائم الزاوية في الرأس A
4) وجدنا أنه إذا كان ABC مثلث حيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A.

2) مبرهنة فيتاغورس العكسية

أ- خاصية 2:

في مثلث، إذا كان مربع أطول ضلع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع
* وتكتب رياضيا: في مثلث، إذا كان $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A

* الشكل الهندسي:



ABC مثلث حيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
إذن ABC قائم الزاوية في A

* ملاحظة:

نستعمل مبرهنة فيتاغورس العكسية لإثبات التعامد.

ب- مثال:

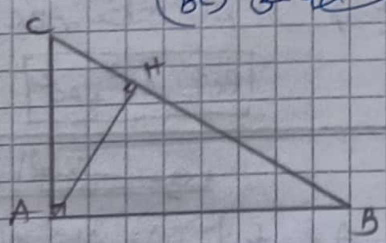
EFG مثلث ~~قائم الزاوية في~~ حيث:
$EF=10$ و $FG=8$ و $EG=6$
لنبين أن EFG قائم الزاوية في G

لدينا: $EG^2 = 6^2 = 36$ ، $FG^2 = 8^2 = 64$ ، $EF^2 = 10^2 = 100$
إذن $EG^2 + FG^2 = 36 + 64 = 100$
إذن: $EG^2 + FG^2 = EF^2$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G

* فقرة إضافية: العلاقات المترية في المثلث القائم

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في A، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)



① $AB \times AC = AH \times BC$
② $AB^2 = BH \times BC$
③ $AC^2 = CH \times BC$
④ $AH^2 = BH \times CH$