الجـــذور المربـعـــة

I _ الجذر المربع لعدد حقيقي موجب :

1) – تعريف :

a عدد حقيقي موجب .

الجذر المربع للعدد a هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a و يكتب : $\sqrt{a}$

2) – مثال :

$\sqrt{\frac{121}{81}}=\frac{11}{9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$; $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{9}=3$

ج) -- ملاحظة هـــــامة : $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{0}=0$.

★ للحفظ ★

$\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{49}=7$

$\sqrt{64}=8$; $\sqrt{81}=9$; $\sqrt{100}=10$; $\sqrt{121}=11$; $\sqrt{144}=12$; $\sqrt{169}=13$

$\sqrt{196}=14$; $\sqrt{225}=15$; $\sqrt{256}=16$; $\sqrt{289}=17$; $\sqrt{324}=18$

$\sqrt{361}=19$; $\sqrt{400}=20$

*/ تمرين تطبيقي :

بسط ما يلي : $\frac{\sqrt{49}}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{25}}$; $\sqrt{0,25}$; $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$; $\sqrt{\frac{25}{9}}$; $\sqrt{9}$

*/ الحـل :

$\sqrt{9}=3$; $\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$; $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$

$\sqrt{0,25}=0,5$; $\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{49}}{3}=\frac{7}{3}$

3) – مربع جذر مربع عدد حقيقي :

أ) -- قاعدة :

a عدد حقيقي .

1/ إذا كان $a>0$ فإن : $\sqrt{(a)^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$

2/ إذا كان $a<0$ فإن : $\sqrt{(a)^2}=\left(\sqrt{-a}\right)^2=-a$

ب) -- أمثلة :

$$\sqrt{(-7)^2}=7 \quad ; \quad \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2=\frac{11}{5} \quad ; \quad \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3} \quad ; \quad \left(\sqrt{\sqrt{9}}\right)^2=\sqrt{9}=3$$

*/ تمرين تطبيقي 1 :

بسط ما يلي :

$$\sqrt{\sqrt{16}} \quad ; \quad \sqrt{(3+\sqrt{2})} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}\right)^2 \quad ; \quad \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-5)^2}}}\right)^2 \quad ; \quad \sqrt{7+\sqrt{2}^2} \quad ; \quad \sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}$$

*/ الحـل :

$$\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{\sqrt{(4)^2}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2 \quad ; \quad \sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^2}}}\right)^2=\sqrt{\sqrt{5}^2}=\sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{7+\sqrt{2^2}}=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$$

$$\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}=-(-7-\sqrt{5})=7+\sqrt{5}$$

*/ تمرين تطبيقي 2 :

بسط ثم أحسب ما يلي :

$$A=\sqrt{25}-\sqrt{3^2}+2\sqrt{(-11)}^2$$

$$B=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-\sqrt{\left(\sqrt{5}+7\right)^2}-\sqrt{13^2}$$

$$C=\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{10-\sqrt{36}}}}$$

*/ الحـل :

$$A=\sqrt{25}-\sqrt{3^2}+2\sqrt{(-11)^2} \quad ; \quad B=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-\sqrt{\left(\sqrt{5}+7\right)^2}-\sqrt{13^2}$$

$$=5-3+2\times 11 \qquad =3+\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}+7\right)-13$$

$$=5-3+22 \qquad =3+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{5}}-7-13$$

$$=24 \qquad =-17$$

$$C=\sqrt{28-\sqrt{7+\sqrt{10-\sqrt{36}}}}$$

$$=\sqrt{28-\sqrt{7+\sqrt{10-6}}}$$

$$=\sqrt{28-\sqrt{7+\sqrt{4}}}$$

$$=\sqrt{28-\sqrt{7+2}}$$

$$=\sqrt{28-\sqrt{9}}$$

$$\sqrt{28-3}$$

$$=\sqrt{25}$$

$$=5$$

*/ تمرين تطبيقي 3 :

عمـل ما يلي :

$a=25x^2-9$; $b=16x^2-7$

$c=3x^2-4$; $d=2x^2-5$

*/ الحـل :

$$a=25x^2-9 \quad ; \quad b=16x^2-7$$

$$=(5x)^2-3^2 \qquad =(4x)^2-\sqrt{7^2}$$

$$=(5x-3)(5x+3) \qquad =\left(4x-\sqrt{7}\right)\left(4x+\sqrt{7}\right)$$

$$c=3x^2-4 \quad ; \quad d=2x^2-5$$

$$=\left(\sqrt{3}.x\right)^2-2^2 \qquad =\left(\sqrt{2}.x\right)^2-\sqrt{5^2}$$

$$=\left(\sqrt{3}.x-2\right)\left(\sqrt{3}.x+2\right) \qquad =\left(\sqrt{2}.x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}.x+\sqrt{5}\right)$$

4)- حـل المعادلة : $x^2 = a$.

أ) -- إذا كان : $a > 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 - a = 0$$

$$^2 - \sqrt{a^2} = 0$$

$$\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{أو} \quad x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = -\sqrt{a} \qquad x = -\sqrt{a}$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.

ب) -- إذا كان : $a = 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 0 .

ج) -- إذا كان : $a < 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ ليس لها حـل.

*/ تمرين تطبيقي :

حـل المعادلات الآتية :

$2x^2 = 6$; $-11 + x^2 = -4$

$2\left(x^2 - 1\right) = -2$; $3x^2 + 15 = 3$

*/ الحـل :

-/ المعادلة : $2x^2 = 6$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = \frac{6}{2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{3}$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$.

-/ المعادلة : $-11+x^2=-4$ تكافئ على التوالي :

$$x^2=-4+15$$

$$x^2=9$$

$$x=\sqrt{9}=3 \quad \text{أو} \quad x=-\sqrt{9}=-3$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : 3 و -3 .

-/ المعادلة : $2\left(x^2-1\right)=-2$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2-2=-2$$

$$2x^2=-2+2$$

$$2x^2=0$$

$$x^2=\frac{0}{2}$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

إذن : هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 0 .

-/ المعادلة : $3x^2+15=3$ تكافئ على التوالي :

$$3x^2=3-15$$

$$3x^2=-12$$

$$x^2=\frac{-12}{3}$$

$$x^2=-4$$

إذن : هذه المعادلة ليس لها حـــل.

II – العمليات على الجذور المربعة :

1) – الجذر المربع و الضرب :

أ) -- خاصية 1 :

a و b و c و ..... و z أعداد حقيقية موجبة.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times.....\sqrt{z}=\sqrt{a\times b\times c\times.....\times z}$$

*/ أمثلة :

$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6$; $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times6}=\sqrt{12}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times3\times5}=\sqrt{30}$; $\sqrt{3\times25}=\sqrt{3}\times\sqrt{25}=\sqrt{3}\times5=5\sqrt{3}$

ب) -- خاصية 2 :

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

*/ أمثلة :

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{5^2 \times 7} = 5\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{3^2 \times 11} = 3\sqrt{11}$$

$$\sqrt{3^2 \times 7} \times \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2\sqrt{7 \times 3} = 6\sqrt{21}$$

★/ تقنيات و مهـــارات :

1) – التفكيك :

لنبسط $\sqrt{180}$: من أجل هذا سنفكك 180 .

التفكيك

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

إذن : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

و منه فإن : $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

2) – الجذور المربعة و القوى :

لنبسط و نحسب ما يلي : $A = \sqrt{5^6}$ و $B = \sqrt{7^5}$.

$$A = \sqrt{5^6} = \left(\sqrt{5^3}\right)^2 = 5^3 = 1\ 5$$

$$B = \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \times 7^1} = \sqrt{\left(7^2\right)^2 \times 7} = 7^2\sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

*/ تمرين تطبيقي :

بسط ثم أحسب ما يلي :

$$a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7} \quad ; \quad b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \quad ; \quad c = \left(3\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9} \quad ; \quad e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{34} \quad ; \quad f = \sqrt{3} \times \sqrt{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

*/ الحـــل :

$$a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7} = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 2^6 \times 2} = 3 \times 5 \times 2^3\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$c = \left(3\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{5^2} = 9 \times 2 - 5 = 18 - 5 = 13$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9} = 5 + 9 - 2 \times 3 = 5 + 9 - 6 = 8$$

$$e=\sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}=\sqrt{2^5\times 3}+2\sqrt{2^3\times 3}-3\sqrt{3^3\times 2}$$
$$=\sqrt{2^4\times 2\times 3}+2\sqrt{2^2\times 2\times 3}-3\sqrt{3^2\times 3\times 2}$$
$$=\sqrt{2^4\times 6}+2\sqrt{2^2\times 6}-3\sqrt{3^2\times 6}$$
$$=2^2\times\sqrt{6}+2\times 2\times\sqrt{6}-3\times 3\times\sqrt{6}=4\sqrt{6}+4\sqrt{6}-9\sqrt{6}$$
$$=(4+4-9)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$$
$$f=\sqrt{3}\times\sqrt{\sqrt{5}+2}\times\sqrt{\sqrt{5}-2}=\sqrt{3}\times\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{3}\times\sqrt{\sqrt{5^2}-2^2}$$
$$=\sqrt{3}\times\sqrt{5-4}=\sqrt{3}\times\sqrt{1}=\sqrt{3}$$

2) – الجذر المربع و القسمة :

أ) -- خاصية 1 :

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b\neq 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

*/ أمثلة :

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2 \quad ; \quad \sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{15}{5}}=\sqrt{3}$$

ب) -- خاصية 2 :

a و b عددان حقيقيان و $b\neq 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{b} \quad ;; \quad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

*/ أمثلة :

$$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad -\sqrt{\frac{1}{11}}=-\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sqrt{\frac{7}{5}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{35}}{5}$$

3) – إزالة الجذر المربع من المقام :

أ) -- مثال 1 :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{6}}{5\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}\left(2+\sqrt{7}\right)}{3\sqrt{11}^2}=\frac{2\times\sqrt{11}+\sqrt{11}\times\sqrt{7}}{3\times 11}=\frac{2\sqrt{11}+\sqrt{77}}{33}$$

ب) -- مثال 2 : (صيغة المرافق)

$$a>0 \quad \text{و} \quad b>0$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هو $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ مرافق و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ هو $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ مرافق

$$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{\sqrt{2^2}-\sqrt{5^2}}=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2-5}=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{-5}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}\left(4+\sqrt{6}\right)}{\left(4-\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{6}\right)}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{4^2-\sqrt{6}^2}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{3^2\times 2}}{16-6}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}$$