الدرس 6 : الترتيب والعمليات

I- مقارنة عددين حقيقيين :

1) نشاط 1

قارن كلا من العددين a و b في الحالات التالية :

1) $a = \frac{12}{7}$, $b = \frac{15}{7}$

2) $a = \frac{15}{14}$ و $b = \frac{-12}{7}$

3) $a = \frac{5}{4}$ و $b = \frac{11}{8}$

4) $a = \frac{6}{5}$ و $b = \frac{6}{11}$

جواب :

1) لدينا : $15 > 12$ إذن : $\frac{15}{7} > \frac{12}{7}$

2) لدينا : $-\frac{12}{7} < 0$ و $\frac{15}{14} > 0$ إذن : $-\frac{12}{7} < \frac{15}{14}$

3) لدينا : $a = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ ، لدينا : $10 < 11$ إذن : $\frac{10}{8} < \frac{11}{8}$ إذن : $\frac{5}{4} < \frac{11}{8}$

4) لدينا : $5 < 11$ إذن : $\frac{6}{5} > \frac{6}{11}$

2) خاصية 1 :

a و b عددان حقيقيان

* إذا كان : $a - b \leq 0$ فإن : $a \leq b$
* إذا كان : $a - b \geq 0$ فإن : $a \geq b$

أي لمقارنة عددين حقيقيين، نحدد إشارة فرقهما .

3) أمثلة :

1) لنقارن $a = \frac{4}{35}$ و $b = \frac{2}{15}$

لدينا : $a - b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12-14}{105} = \frac{-2}{105}$

لدينا : $-\frac{2}{105} < 0$ إذن $a - b < 0$

إذن $\boxed{a < b}$

2) لنقارن العددين $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

لدينا : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = 2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+\sqrt{5}$
$= \sqrt{3}+1$

بما أن : $\sqrt{3}+1 > 0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5) > 0$

ومنه فإن : $\boxed{2\sqrt{3}-4 > \sqrt{3}-5}$

4) تمرين تطبيقي

قارن كلا من العددين الآتيين :

1) $\frac{15}{14}$ و $\frac{12}{7}$

2) $7+\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{2}-1$

3) $\sqrt{3}-1$ و $5\sqrt{3}+4$

الحل :

1) * $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} = \frac{15-24}{14} = \frac{-9}{14}$

بما أن $-\frac{9}{14} < 0$ فإن : $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} < 0$

ومنه فإن : $\frac{15}{14} < \frac{12}{7}$

2) * $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1) = 7+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+1$
$= 4\sqrt{2}+8$

بما أن $4\sqrt{2}+8 > 0$ فإن : $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1) > 0$

ومنه فإن : $7+\sqrt{2} > -3\sqrt{2}-1$

3) $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1) = 5\sqrt{3}+4-\sqrt{3}+1$
$= 4\sqrt{3}+5$

بما أن $4\sqrt{3}+5 > 0$ فإن : $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1) > 0$

ومنه فإن : $5\sqrt{3}+4 > \sqrt{3}-1$

II- الترتيب والعمليات :

1) الترتيب والجمع :

أ- خاصية 1 :

a و b و c أعداد حقيقية

* إذا كان $a \leq b$ فإن : $a+c \leq b+c$
* إذا كان $a+c \leq b+c$ فإن : $a \leq b$

* مثال :

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a+4 \leq b$

لنبين أن : $a+1 \leq b-3$

لدينا $a+4 \leq b$ إذن : $a+4-3 \leq b-3$

أي $a+1 \leq b-3$

ب- خاصية 2 :

a و b و c و d أعداد حقيقية

إذا كان $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ فإن : $a+c \leq b+d$

* مثال :

a و b عددان حقيقيان بحيث : $b+4 \leq \sqrt{2}$ و $a+3 \leq 3$

بين أن $a+b+7 \leq 3+\sqrt{2}$

نعلم أن $b+4 \leq \sqrt{2}$ و $a+3 \leq 3$

إذن : $b+4+a+3 \leq \sqrt{2}+3$

ومنه فإن : $a+b+7 \leq \sqrt{2}+3$

2) الترتيب والضرب

أ- نشاط ②:

a و b أعداد حقيقية بحيث: $a\le b$

① نفترض أن c موجب قارن ac و bc

② نفترض أن c سالب قارن ac و bc

الحل:

① لدينا: $ac-bc=c(a-b)$:

بما أن: $a\le b$ فإن: $a-b\le 0$

و c موجب إذن: $c(a-b)\le 0$

لدينا: $ac-bc\le 0$

وبالتالي $\boxed{ac\le bc}$

② لدينا: $ac-bc=c(a-b)$

لدينا: $a-b\le 0$ و بما أن c سالب

فإن $c(a-b)\ge 0$ ومنه فإن: $ac-bc\ge 0$

وبالتالي فإن $\boxed{ac\ge bc}$

ب- خاصية ③:

a و b و c أعداد حقيقية

* إذا كان $a\le b$ و $c>0$ فإن: $a\times c\le b\times c$
* إذا كان $a\le b$ و $c<0$ فإن: $a\times c\ge b\times c$

* مثال:

a و b عددان حقيقيان بحيث $b\ge\sqrt3$ و $a\ge\frac43$

لنستنتج $-2b$ و $3a$

لدينا $a\ge\frac43$ أي $3\times a\ge\frac43\times3$ إذن $3a\ge 4$

ولدينا $b\ge\sqrt3$ أي $-2\times b\le-2\sqrt3$ إذن $-2b\le-2\sqrt3$

* ملاحظة: a و b عددان حقيقيان

إذا كان $a\le b$ فإن $-a\ge-b$

ج- خاصية ④:

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases}a\le b\\ c\le d\end{cases}$ فإن: $a\times c\le b\times d$

* مثال:

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث: $x<\sqrt3$ و $y<2\sqrt6$

لنبين أن $xy<6\sqrt2$

لدينا $\begin{cases}x<\sqrt3\\ y<2\sqrt6\end{cases}$ إذن $x\times y<\sqrt3\times2\sqrt6$

$x\times y<2\sqrt3\times\sqrt2\times\sqrt3$

$xy<2\times\sqrt2\times\sqrt3^2$

$\boxed{xy<6\sqrt2}$

د- تمرين تطبيقي:

x و y عددان حقيقيان بحيث: $x\ge1$ و $y\ge2$

بين أن: $(x-1)(y-2)\ge0$

* جواب:

لدينا: $x\ge1$ إذن $x-1\ge0$

و $y\ge2$ إذن: $y-2\ge0$

يعني أن: $(x-1)(y-2)\ge0$

3) الترتيب والمقلوب:

أ- خاصية ⑤:

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا

إذا كان $a\le b$ فإن: $\frac1a\ge\frac1b$ والعكس صحيح

ب- أمثلة:

* لدينا: $2<4$ إذن: $\frac12\ge\frac14$
* لدينا $11>5$ إذن: $\frac1{11}<\frac15$

ج- تمرين تطبيقي:

x عدد حقيقي بحيث $x\ge1$ بين أن $\frac{-5}{x+2\sqrt3}\ge\frac{-5}{1+2\sqrt3}$

لدينا $x\ge1$ إذن: $x+2\sqrt3\ge1+2\sqrt3$

ومنه فإن: $\frac1{x+2\sqrt3}\le\frac1{1+2\sqrt3}$

وبالتالي فإن: $\frac{-5}{x+2\sqrt3}\ge\frac{-5}{1+2\sqrt3}$

4) خاصيات أخرى: المربع والجذر المربع.

أ- خاصية ⑥: المربع

a و b عددان حقيقيان موجبان

* إذا كان $a\le b$ فإن $a^2\le b^2$
* إذا كان $a^2\le b^2$ فإن $a\le b$

* ملاحظة:

a و b عددان حقيقيان سالبان

إذا كان $a\le b$ فإن $a^2\ge b^2$

* أمثلة:

* لنقارن $2\sqrt2$ و 3

لدينا $\begin{cases}(2\sqrt2)^2=4\times2=8\\ 3^2=9\end{cases}$ بما أن: $8<9$ إذن $(2\sqrt2)^2<3^2$ أي أن $\boxed{2\sqrt2<3}$

* لنقارن $-3\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{5}$

لدينا $\begin{cases}(2\sqrt{5})^2 = 4\times 5 = 20\\ (-3\sqrt{2})^2 = 9\times 2 = 18\end{cases}$ بما أن $18 < 20$ فإن $(2\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{2})^2$

إذن : $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$ وبالتالي $\boxed{-2\sqrt{5} < -3\sqrt{2}}$

ب- خاصية ⑦ : الجذر المربع :

a و b عددان حقيقيان موجبان .

* إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
* إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن : $a \leq b$

ج- تمرين تطبيقي :

① قارن $4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$ ثم $-\sqrt{91}$ و $-6\sqrt{3}$

② قارن العددين $\sqrt{5}+4$ و $\sqrt{3}+4$

جواب :

① لدينا : $\begin{cases}(3\sqrt{3})^2 = 9\times 3 = 27\\ (4\sqrt{2})^2 = 16\times 2 = 32\end{cases}$ بما أن $27 < 32$ فإن : $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$

إذن : $\boxed{3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}}$

* لدينا : $\begin{cases}\sqrt{91}^2 = 91\\ (6\sqrt{3})^2 = 36\times 3 = 108\end{cases}$ بما أن $91 < 108$ فإن : $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$

إذن : $\boxed{\sqrt{91} < 6\sqrt{3}}$

وبالتالي : $-\sqrt{91} > -6\sqrt{3}$

② لدينا $\begin{cases}\sqrt{3}^2 = 3\\ \sqrt{5}^2 = 5\end{cases}$ إذن : $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$

وبالتالي : $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

III- التأطير :

1) تأطير مجموع عددين :

* خاصية ⑧ : نعتبر جميع الأعداد حقيقية

إذا كان $\begin{cases}a \leq x \leq b\\ c \leq y \leq d\end{cases}$ فإن : $\boxed{a+c \leq x+y \leq b+d}$

* مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث $2 \leq x \leq 5$ و $-3 \leq y \leq -1$ أطر $x+y$

لدينا $\begin{cases}2 \leq x \leq 5\\ -3 \leq y \leq -1\end{cases}$ إذن $2+(-3) \leq x+y \leq 5+(-1)$

$\boxed{-1 \leq x+y \leq 4}$

2) تأطير مقابل عدد حقيقي :

* خاصية ⑨ : x عدد حقيقي بحيث $a \leq x \leq b$ لدينا : $\boxed{-b \leq -x \leq -a}$

* مثال : $-4 \leq x \leq 3$ أطر $-x$

لدينا : $-3 \leq -x \leq 4$

3) تأطير فرق :

* خاصية ⑩ : نعتبر جميع الأعداد حقيقية

إذا كان $\begin{cases}a \leq x \leq b\\ c \leq y \leq d\end{cases}$ فإن : $\boxed{a-d \leq x-y \leq b-c}$

* ملاحظة هامة :

لدينا : $a-b = a+(-b)$

إذن لتأطير $a-b$ نأطر a و $-b$ ثم نطبق الخاصية ⑧ (تأطير المجموع)

* مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x-y$

+ لدينا : $-4 \leq y \leq 2$ إذن : $-2 \leq -y \leq 4$

لدينا $\begin{cases}3 \leq x \leq 8\\ -2 \leq -y \leq 4\end{cases}$ إذن : $3+(-2) \leq x+(-y) \leq 8+4$

$\boxed{1 \leq x-y \leq 12}$

4) تأطير جداء عددين :

* خاصية ⑪ : نعتبر جميع الأعداد الحقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases}a \leq x \leq b\\ c \leq y \leq d\end{cases}$ فإن : $\boxed{a\times c \leq x\times y \leq b\times d}$

* أمثلة : حالة ① : جميع الأعداد الحقيقية موجبة

$3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 4$

لنؤطر xy

لدينا $\begin{cases}3 \leq x \leq 7\\ 1 \leq y \leq 4\end{cases}$ إذن : $3\times 1 \leq x\times y \leq 7\times 4$

$\boxed{3 \leq xy \leq 28}$

* حالة ② : x موجب و y عدد سالب

$4 \leq x \leq 8$ و $-5 \leq y \leq -2$ أطر xy

أولا يجب أن تكون الأعداد المؤطرة لـ x و y موجبة

لدينا $-5 \leq y \leq -2$ إذن : $2 \leq -y \leq 5$

لدينا $\begin{cases}4 \leq x \leq 8\\ 2 \leq -y \leq 5\end{cases}$ نلاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة لـ x و -y هي موجبة

إذن : $4\times 2 \leq x\times(-y) \leq 8\times 5$

$8 \leq -xy \leq 40$

لاحظ معي هنا أننا نؤطر $-xy$ وليس xy

إذن نتخلص من الإشارة $-$

لدينا $8 \leq -xy \leq 40$ إذن $\boxed{-40 \leq xy \leq -8}$

5) تأطير مقلوب:

* **خاصية 12:** x و a و b أعداد حقيقية غير منعدمة

حيث: $a \leq x \leq b$

لدينا: $\boxed{\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}}$

* مثال: لدينا $2 \leq x \leq 4$ إذن: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

6) تأطير خارج عددين:

* **خاصية 13:** نعتبر جميع الأعداد الحقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ حيث: $y \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$

فإن: $\boxed{\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}}$

* **ملاحظة هامة:** لدينا: $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

إذن لتأطير $\frac{a}{b}$ نؤطر أولا $\frac{1}{b}$ ثم نطبق الخاصية 11 (تأطير الجداء)

* **أمثلة:** حالة 1: جميع الأعداد موجبة

x و y عددان حقيقيان بحيث $6 \leq x \leq 10$ و $2 \leq y \leq 3$ أطر $\frac{x}{y}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $2 \leq y \leq 3$ إذن: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2}$

وبالتالي: $\boxed{2 \leq \frac{x}{y} \leq 5}$

* حالة 2: x موجب و y سالب

أطر $\frac{x}{y}$: $6 \leq x \leq 10$ و $-3 \leq y \leq -2$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $-3 \leq y \leq -2$ إذن: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3}$

نلاحظ أن الأعداد المؤطرة لـ $\frac{1}{y}$ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة

لدينا: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3}$ إذن: $\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 10 \times \frac{1}{2}$

$2 \leq -\frac{x}{y} \leq 5$

لدينا طلب هنا $\frac{x}{y}$ وليس $-\frac{x}{y}$ إذن نتخلص من الإشارة -

لدينا: $\boxed{-5 \leq \frac{x}{y} \leq -2}$

7) تمارين تطبيقية:

* **تمرين تطبيقي 1:** 55 و 42 ص

$2 \leq a \leq 3$ و $-4 \leq b \leq -3$

* تأطير $a+b$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ -4 \leq b \leq -3 \end{cases}$ إذن: $2+(-4) \leq a+b \leq 3+(-3)$

$\boxed{-2 \leq a+b \leq 0}$

* تأطير $a-b$

لدينا: $-4 \leq b \leq -3$ إذن: $3 \leq -b \leq 4$

لدينا $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ إذن: $2+3 \leq a+(-b) \leq 3+4$

إذن $\boxed{5 \leq a-b \leq 7}$

* تأطير ab

لدينا $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ إذن: $2 \times 3 \leq a \times (-b) \leq 3 \times 4$

$6 \leq -ab \leq 12$

وبالتالي: $\boxed{-12 \leq ab \leq -6}$

* تأطير $\frac{a}{b}$

لدينا: $-4 \leq b \leq -3$ إذن: $\cancel{3 \leq -b \leq 4}$

$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{4}$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$ إذن: $2 \times \frac{1}{4} \leq a \times \left(-\frac{1}{b}\right) \leq 3 \times \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leq -\frac{a}{b} \leq 1$

وبالتالي: $\boxed{-1 \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{2}}$

* **تمرين تطبيقي 2:** a و b و c أعداد حقيقية بحيث:

$6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$

أطر a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{a^2}$

الحل:

* تأطير a^2

لدينا: $6 \leq a \leq 8$ إذن: $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$

إذن: $\boxed{36 \leq a^2 \leq 64}$

* تأطير b^2

لدينا: $-4 \leq b \leq -2$ إذن: $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$

وبالتالي: $\boxed{4 \leq b^2 \leq 16}$

* تأطير $a+2b-4c$:

لدينا : $-4 \leq b \leq -2$ إذن : $-8 \leq 2b \leq -4$

لدينا : $-3 \leq c \leq 5$ إذن : $-20 \leq -4c \leq 12$

لدينا : $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -8 \leq 2b \leq -4 \\ -20 \leq -4c \leq 12 \end{cases}$ إذن : $6-8-20 \leq a+2b-4c \leq 8-4+12$

وبالتالي : $\boxed{-22 \leq a+2b-4c \leq 16}$

* تأطير $\frac{a+b}{b^2}$

لدينا : $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -4 \leq b \leq -2 \end{cases}$ إذن : $6+(-4) \leq a+b \leq 8+(-2)$

$2 \leq a+b \leq 6$

ولدينا : $4 \leq b^2 \leq 16$ إذن : $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

لدينا : $\begin{cases} 2 \leq a+b \leq 6 \\ \frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ إذن : $2 \times \frac{1}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$

وبالتالي : $\boxed{\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}}$