مبرهنة فيتاغورس

تمرين 1

$ABCD$ مستطيل حيث : $AB = 6cm$ و $AD = 9cm$.

و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J نقطة من القطعة : $[AD]$ حيث $AJ = 1cm$

① احسب المسافات IJ و IC و JC

② بين أن المثلث : IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

تمرين 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $AB = 6cm$ و $AC = 8cm$.

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

① احسب المسافة BC

② احسب المسافة AH (احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين)

③ احسب المسافات BH و CH

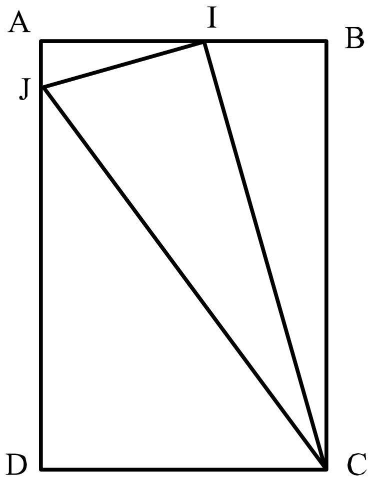
تمرين 3 من أولمبياد الرياضيات

$ABCD$ مستطـيـل و M نقطة داخلـه .

◈ بين أن : $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$

مبرهنة فيتاغورس-حلول

تمرين 1



① لنحسب المسافات IJ و IC و JC

لدينا في المثلث القائم الزاوية AIJ حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IJ^2 = AI^2 + AJ^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1^2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ منه $IJ = \sqrt{10}\,cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IBC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IC^2 = BI^2 + BC^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$ منه $IC = \sqrt{90}\,cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية JDC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$JC^2 = DC^2 + DJ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $JC = \sqrt{100} = 10\,cm$

② لنبين أن المثلث : IJC قائم الزاوية في النقطة I

لدينا : $JC^2 = 10^2 = 100$ و $IC^2 = \left(\sqrt{90}\right)^2 = 90$ و $IJ^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$

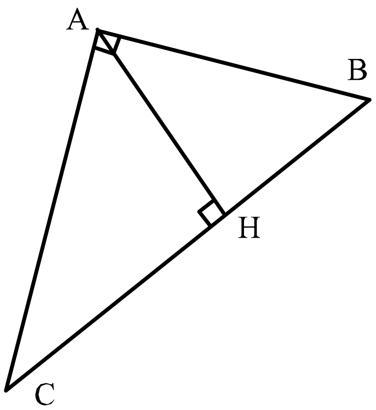
إذن : $IJ^2 + IC^2 = JC^2$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية نستنتج أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

محيط المثلث IJC هو : $p = IJ + JC + CI = \sqrt{10} + 10 + \sqrt{90} = \sqrt{10} + 10 + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10} + 10\,cm$

بما أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I فإن مساحته هي : $S = \frac{IJ \times IC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15\,cm^2$

تمرين 2



① لنحسب المسافة BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $BC = \sqrt{100} = 10\,cm$

② احسب المسافة AH

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A فإن مساحته هي : $S = \frac{AB \times AC}{2}$

و أيضا بما أن $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC فإن مساحته أيضا هي : $S = \frac{AH \times BC}{2}$

نستنتج إذن أن : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2}$ منه $AH \times BC = AB \times AC$

نعوض نجد : $AH \times 10 = 6 \times 8$ أي $AH = 48$ 10 ، بالتالي : $AH = \frac{48}{10} = 4{,}8\,cm$

③ لنحسب BH و CH

* لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ منه $6^2 = 4{,}8^2 + BH^2$ منه $36 = 23{,}04 + BH^2$

منه : $BH^2 = 36 - 23{,}04$

$BH^2 = 12{,}96$ منه $BH = \sqrt{12{,}96}$ (باستعمال آلة حاسبة نجد $BH = 3{,}6\,cm$)

* لدينا : $CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4\,cm$

← رغم أننا نبحث عن المسافة BH إلا أن المتساوية $BH^2 = AH^2 + AB^2$ **خاطئة** لأن الوتر هو AB و ليس BH

تمرين 3 | من أولمبياد الرياضيات

تمرين 3 :

لتكن E و F و G و H هي على التوالي المساقط العمودية للنقطة M على (AB) و (BC) و (CD) و (AD) على التوالي .

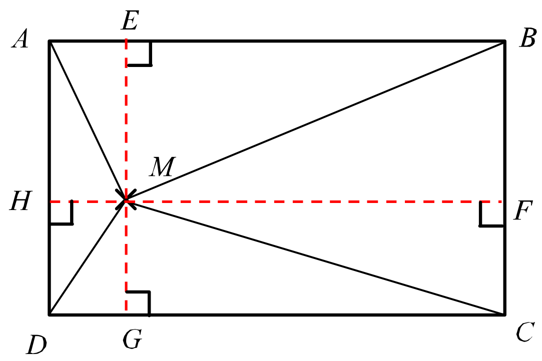
لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$AM^2 = EM^2 + AE^2$ و $CM^2 = FM^2 + CF^2$

$AM^2 = EM^2 + MH^2$ و $CM^2 = FM^2 + MG^2$

و $BM^2 = EM^2 + BE^2$ و $DM^2 = MG^2 + DG^2$

$BM^2 = EM^2 + FM^2$ و $DM^2 = MG^2 + MH^2$



نستنتج إذن أن :

$$AM^2 + CM^2 = EM^2 + MH^2 + FM^2 + MG^2$$

و $$BM^2 + DM^2 = EM^2 + FM^2 + MG^2 + MH^2$$

بالتالـــي : $\underline{AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2}$