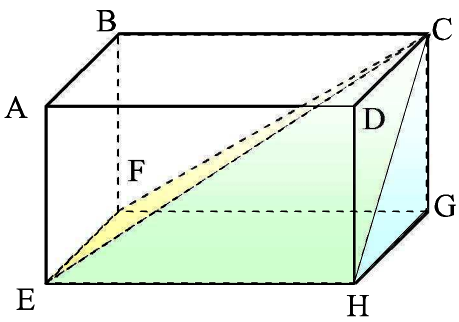
# الهندسة الفضائية: المساحات و الحجوم

# سلسلة تمارين

## تمرين 1

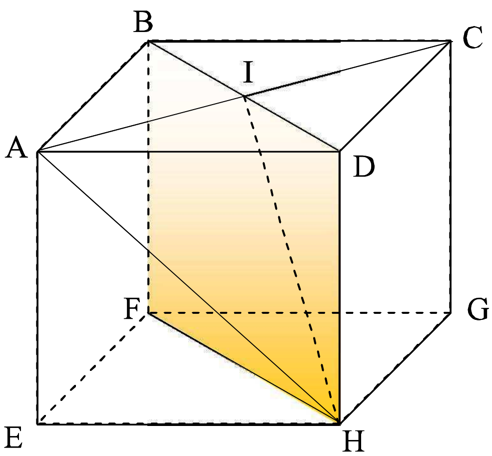



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث:
$AE = 4$ و $AD = 6$ و $AB = 3$

1- احسب $BD$ و $CH$ و $BG$
2- أ- بين أن $(BF) \perp (BD)$
ب- احسب $DF$

3- احسب حجم $ABCDEFGH$
4- احسب حجم الهرم $CEFGH$

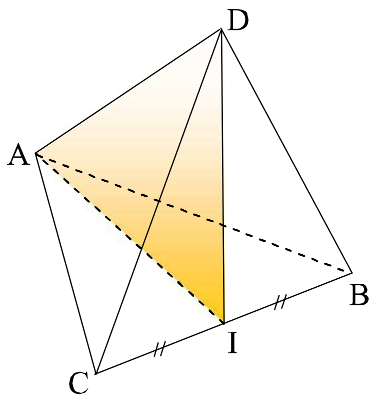
## تمرين 2




$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $a = 4$ و $I$ مركز المربع $ABCD$
1- احسب $AC$ و $AI$ و $AH$
2- أ- بين أن $(DH) \perp (ID)$
ب- احسب $IH$

3- باستعمال مبرهنة فيتاغورس العكسية ، بين أن $(AI) \perp (IH)$
4- استنتج أن : $(AI) \perp (FBDH)$
5- احسب $V_1$ حجم المكعب $ABCDEFGH$
6- احسب $V_2$ حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين
7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

## تمرين 3




$ABCD$ رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a = 4$
(أي $AB = BC = AC = AD = DC = DB = 4$ )
و $I$ منتصف $[BC]$
1- أ- بين أن $(DI) \perp (BC)$ ثم احسب $DI$
ب- احسب $AI$ ثم حدد طبيعة المثلث $AID$

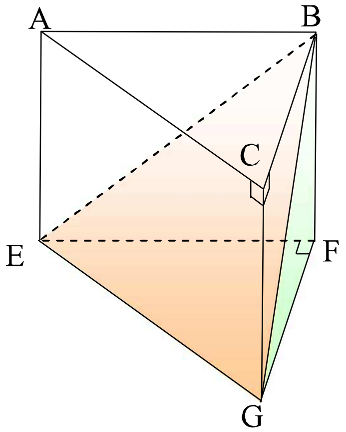
2- بين أن $(BC) \perp (ADI)$
3- لتكن $J$ منتصف $[AD]$
أ- احسب $IJ$
ب- احسب مساحة المثلث $AID$

4- احسب $V_1$ حجم رباعي الأوجه $CAID$
5- استنتج $V$ حجم رباعي الأوجه المنتظم $ABCD$

سؤال للبحث :

مستعينا بخطوات التمرين ،بين أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو $a$ ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

## تمرين 4




$ABCEFG$ موشور قائم قاعدته عبارة عن مثلث قائم الزاوية في $F$

نعطي: $EF = 4$ و $FG = 3$ و $BF = 4$

1- احسب حجم $ABCEFG$

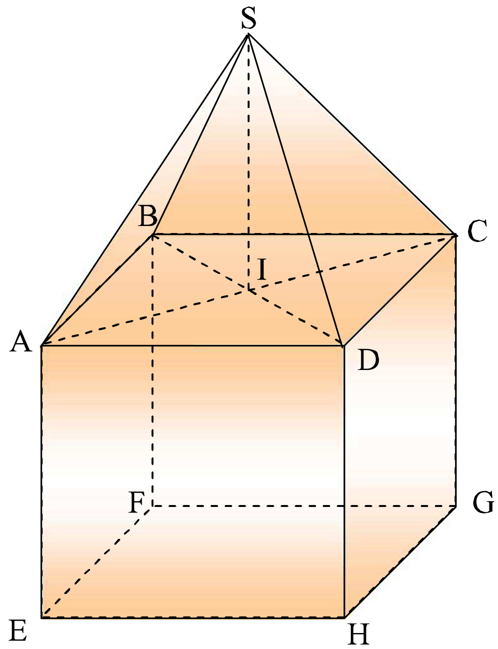
2- احسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$

3- استنتج حجم الهرم $BAEGC$

4- أ- احسب مساحة المستطيل $ACGE$

ب- استنتج قيمة $h$ ارتفاع الهرم $BAEGC$

## تمرين 5

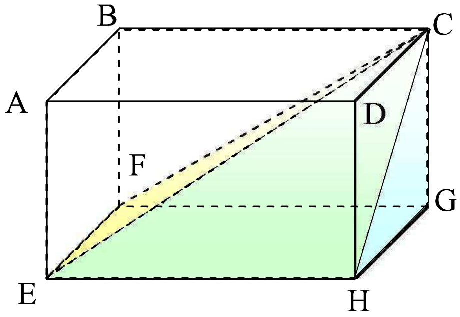



يمثل الشكل جانبه تصميما مصغرا لمنزل خشبي، مركب من مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه $AB = 3cm$ و هرم $SABCD$ مربع القاعدة ارتفاعه $SI = 4cm$

1- احسب حجم هذا المجسم

2- إذا علمت أن نسبة التصغير هي $k = \frac{1}{200}$ فاحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب.

تمرين 1    انتبه ←    تعليق ←

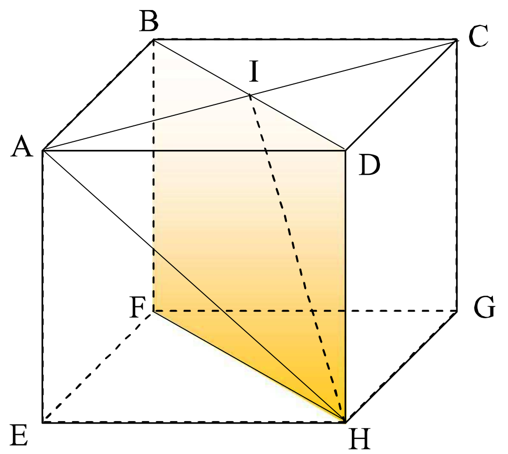
| | |
|---|---|
| 1- لنحسب $BD$ و $CH$ و $BG$ | معطيات :<br>$AB=3$ و $AD=6$ و $AE=4$ |
| لدينا $ABD$ مثلث قائم الزاوية في $A$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :<br>$BD^2=AB^2+AD^2$<br>$BD^2=3^2+6^2$<br>$BD^2=9+36$<br>$BD^2=45$<br>$BD=\sqrt{45}$ |  |
| لدينا $DCH$ مثلث قائم الزاوية في $D$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :<br>$CH^2=DC^2+DH^2$<br>$CH^2=3^2+4^2$<br>$CH^2=9+16$<br>$CH^2=25$<br>$CH=5$ | لدينا $BGC$ مثلث قائم الزاوية في $C$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :<br>$BG^2=BC^2+CG^2$<br>$BG^2=6^2+4^2$<br>$BG^2=36+16$<br>$BG^2=52$<br>$BG=\sqrt{52}$ |
| 2- أ- لنبين أن $(BF)\perp(BD)$ | ب- لنحسب $DF$ |
| لدينا $ABFE$ مستطيل ، إذن : $(BF)\perp(AB)$<br>و لدينا $BCGF$ مستطيل ، إذن : $(BF)\perp(BC)$<br>و بما أن $(AB)$ و $(BC)$ متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$، فإن : $(BF)\perp(ABCD)$<br>و حيث أن $(BD)$ ضمن المستوى $(ABCD)$<br>فإن : $(BF)\perp(BD)$ | لدينا حسب السؤال السابق $BDF$ مثلث قائم الزاوية في $B$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :<br>$DF^2=BF^2+BD^2$<br>$DF^2=4^2+\left(\sqrt{45}\right)^2$<br>$DF^2=16+45$<br>$DF^2=61$<br>$DF=\sqrt{61}$ |
| 3- لنحسب حجم $ABCDEFGH$ | 4- لنحسب حجم الهرم $CEFGH$ |
| $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم، حجمه :<br>$V=AB\times AD\times AE$<br>$V=3\times6\times4$<br>$V=72$ | $CEFGH$ هرم قاعدته هي المستطيل $EFGH$ و ارتفاعه $CG$، إذن حجمه :<br>$V'=\frac{1}{3}\times CG\times S_{EFGH}$<br>$V'=\frac{1}{3}\times CG\times(EF\times EH)$<br>$V'=\frac{1}{3}\times4\times(3\times6)$<br>$V'=\frac{72}{3}=24$ |

←لاحظ أن الزوايا القائمة الحقيقية ليست ظاهرة في التمثيل ، هذا يعني أنه يتوجب استحضار الشكل الحقيقي لمتوازي المستطيلات القائم للعثور على هذه الزوايا.

تمرين 2 | انتبه ← | تعليق ←

**معطيات :**

$AB = AD = AE = a = 4$




**1- لنحسب $AC$ و $AI$ و $AH$**

لدينا $ADC$ مثلث قائم الزاوية في $D$ ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AC^2 = 16 + 16$$
$$AC^2 = 32$$
$$AC = \sqrt{32}$$

و بما أن $I$ منتصف $[AC]$ فإن : $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$

لدينا $ADH$ مثلث قائم الزاوية في $D$ ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AH^2 = AD^2 + DH^2$$
$$AH^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AH^2 = 16 + 16$$
$$AH^2 = 32$$
$$AH = \sqrt{32}$$

← يستحسن تبسيط $AH = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$ مما يسمح أيضا بتبسيط $AI = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، لكنه ليس الزاميا.

**2- أ- لنبين أن $(DH)\perp(ID)$**

لدينا $ADHE$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(AD)$

و لدينا $DCGH$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(DC)$

و بما أن $(AD)$ و $(DC)$ متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$، فإن : $(DH)\perp(ABCD)$

و حيث أن $(ID)$ ضمن المستوى$(ABCD)$

فإن : $(DH)\perp(ID)$

**ب- احسب $IH$**

لدينا حسب السؤال السابق $IDH$ مثلث قائم الزاوية في $D$ ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$IH^2 = ID^2 + DH^2$$
$$IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + 4^2$$
$$IH^2 = \frac{32}{4} + 16$$
$$IH^2 = 8 + 16$$
$$IH^2 = 24$$
$$IH = \sqrt{24}$$

**3- لنبين أن $(AI)\perp(IH)$**

لدينا

$$AI^2 + IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2$$
$$AI^2 + IH^2 = \frac{32}{4} + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 8 + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 32$$

و $AH^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2$

$AH^2 = 32$

إذن : $AI^2 + IH^2 = AH^2$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث $AIH$ قائم الزاوية في النقطة $I$ ، أي $(AI)\perp(IH)$

**4- لنبين أن : $(AI)\perp(FBDH)$**

لدينا $ABCD$ مربع ، إذن قطراه متعامدان ، منه $(AI)\perp(BD)$ ، و لدينا حسب السؤال السابق : $(AI)\perp(IH)$ ، و بما أن $(BD)$ و $(IH)$ متقاطعان و يحددان المستوى $(FBDH)$، فإن : $(AI)\perp(FBDH)$

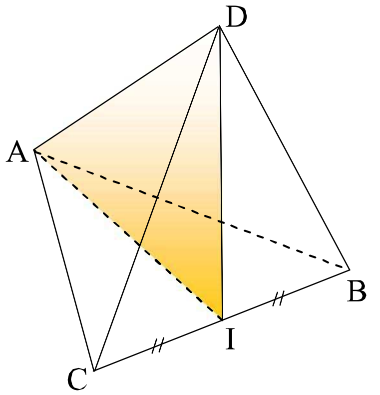
**5- لنحسب $V_1$ حجم المكعب $ABCDEFGH$**

$$V_1 = a^2 = 4\times4\times4 = 64$$

تمرين 2 انتبه ← تعليق ←

| 6- لنحسب $V_2$ حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين | |
|---|---|
| الطريقة الأولى | الطريقة الثانية |
| بما أن $(DH)\perp(ABCD)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث $AID$ و ارتفاعه $DH$ ، منه : $V_2=\frac{1}{3}\times DH\times S_{AID}$ ؛ $V_2=\frac{1}{3}\times DH\times\frac{AI\times ID}{2}$ ؛ $V_2=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\sqrt{32}}{2}}{2}$ ؛ $V_2=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{32}{4}}{2}=\frac{4\times 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$ | بما أن $(AI)\perp(FBDH)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث $IDH$ و ارتفاعه $AI$ ، منه : $V_2=\frac{1}{3}\times AI\times S_{IDH}$ ؛ $V_2=\frac{1}{3}\times AI\times\frac{ID\times DH}{2}$ ؛ $V_2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times 4}{2}$ ؛ $V_2=\frac{\sqrt{32}}{6}\times\frac{2\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{32}}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$ |
| ← باستعمال التبسيط المشار إليه سابقا يمكن الحصول على النتيجة بسهولة | |
| 7- تحقق أن : $V_1=12V_2$ | |
| لدينا : $12V_2=12\times\frac{16}{3}=\frac{192}{3}=64$ ، إذن : $V_1=12V_2$ | |

تمرين 3 انتبه ← تعليق ←

| 1- أ- بين أن $(DI)\perp(BC)$ ثم احسب $DI$ | معطيات : $AB=BC=AC=AD=DC=DB=4$ ؛ $I$ منتصف $[BC]$ |
|---|---|
| لدينا $DBC$ مثلث متساوي الأضلاع و $I$ منتصف $[BC]$ ، إذن $(DI)$ يمثل ارتفاعا للمثلث $DBC$ ، منه $(DI)\perp(BC)$. لدينا $DIC$ مثلث قائم الزاوية في $I$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $DC^2=CI^2+DI^2$ ؛ $4^2=2^2+DI^2$ ؛ $16=4+DI^2$ ؛ $16-4=DI^2$ ؛ $12=DI^2$ ؛ $DI=\sqrt{12}$ |  |
| ب- احسب $AI$ ثم حدد طبيعة المثلث $AID$ | |
| لدينا $ABC$ مثلث متساوي الأضلاع و $I$ منتصف $[BC]$ ، إذن $(AI)$ يمثل ارتفاعا للمثلث $ABC$ ، منه $(AI)\perp(BC)$. لدينا $DIC$ مثلث قائم الزاوية في $I$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $AC^2=CI^2+AI^2$ ؛ $4^2=2^2+AI^2$ ؛ $16=4+AI^2$ ؛ $16-4=AI^2$ ؛ $12=AI^2$ ؛ $AI=\sqrt{12}$ | إذن $AI=DI$ منه $AID$ مثلث متساوي الساقين في النقطة $I$ |

## تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

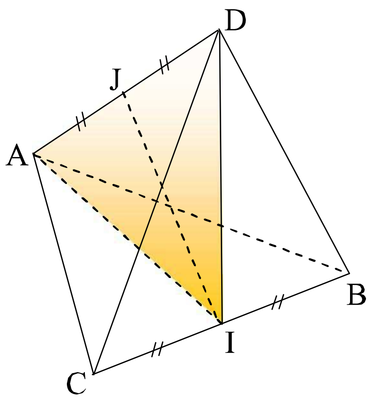
-2 بين أن $(BC)\perp(ADI)$

لدينا حسب ما سبق $(BC)\perp(ID)$ و $(BC)\perp(IA)$

و بما أن $(ID)$ و $(IA)$ متقاطعان و يحددان المستوى $(ADI)$ ، فإن :

$(BC)\perp(ADI)$

-3 أ- لنحسب $IJ$




لدينا حسب السؤال1-ب $AID$ مثلث متساوي الساقين في النقطة $I$، و $J$ منتصف $[AD]$، إذن : $(IJ)$ يمثل ارتفاعا للمثلث $ADI$، منه $(IJ)\perp(AD)$

لدينا $AIJ$ مثلث قائم الزاوية في $J$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

$$AI^2=AJ^2+IJ^2$$
$$\left(\sqrt{12}\right)^2=2^2+IJ^2$$
$$12=4+IJ^2$$
$$12-4=IJ^2$$
$$8=IJ^2$$
$$IJ=\sqrt8$$

-3 ب- لنحسب مساحة المثلث $AID$

$$S_{AID}=\frac{AD\times IJ}{2}$$
$$S_{AID}=\frac{4\times\sqrt8}{2}$$
$$S_{AID}=2\sqrt8$$

-4 لنحسب حجم رباعي الأوجه $CAID$

لدينا حسب السؤال 2 : $(BC)\perp(ADI)$ ، إذن : يمكن اعتبار $CAID$ هرما قاعدته المثلث $AID$ و ارتفاعه $CI$ ، منه :

$$V_1=\frac{1}{3}\times CI\times S_{AID}$$
$$V_1=\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt8=\frac{4\sqrt8}{3}=\frac{8\sqrt2}{3}$$

-5 لنحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$

$$V=2V_1$$
$$V=\frac{16\sqrt2}{3}$$

← مستعينا بخطوات التمرين ،يمكنك أن تبرهن أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو $a$ ، فإن حجمه هو : $V=\frac{\sqrt2}{12}a^3$

## تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

-1 لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$

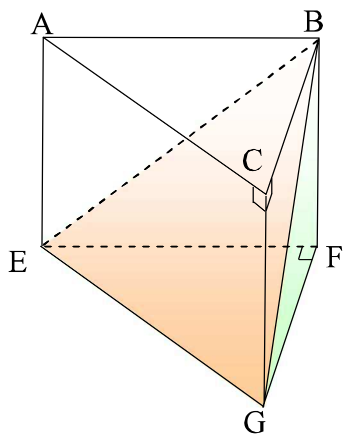
$$V_1=BF\times S_{EFG}$$
$$V_1=BF\times\frac{EF\times FG}{2}$$
$$V_1=4\times\frac{4\times3}{2}=4\times6=24$$

-2 لنحسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$

$$V_2=\frac{1}{3}\times BF\times S_{EFG}$$
$$V_2=\frac{1}{3}\times24$$
$$V_2=8$$

معطيات :

$EF=4$ و $FG=3$ و $BF=4$




-3 لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$

$$V=V_1-V_2$$
$$V=24-8$$
$$V=16$$

-4 أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$

لنحسب أولا $AC$ ، لدينا $ABC$ مثلث قائم الزاوية في $B$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

$AC^2=4^2+3^2$ منه $AC=5$

$$AC^2=16+9=25$$

إذن $S_{ACGE}=AC\times CG=4\times5=20$

-4 ب- لنحسب $h$ ارتفاع الهرم $BAEGC$

باعتبار أن $BAEGC$ هرم قاعدته $EACG$ و ارتفاعه $h$ فإن :

$$V=\frac{1}{3}\times h\times S_{ACGE}$$

و لدينا حسب ماسبق $V=16$

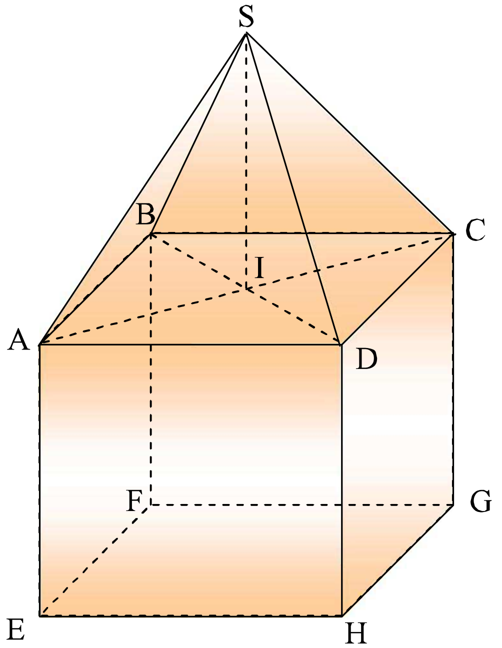
إذن : $\frac{1}{3}\times h\times20=16$

منه : $\frac{20h}{3}=16$

بالتالي : $h=\frac{16\times3}{20}=\frac{48}{20}=\frac{12}{5}$

← لاحظ أن بعض المجسمات يمكن حساب حجمها بطرق مختلفة، لكونها إما جزءا من مجسمات أخرى أو لكونها تحتوي على أكثر من قاعدة و ارتفاع، و هذا يكون مفيدا في حساب بعض المسافات.

تمرين 5 انتبه ← تعليق ←

| | |
|---|---|
| 1- لنحسب حجم هذا المجسم | معطيات : $AB = 3cm$ و $SI = 4cm$ |
| المجسم يتكون من مكعب و هرم مربع القاعدة.<br>حجم المكعب هو : $V_1 = AB^3 = 3\times3\times3 = 27\,cm^3$<br>و حجم الهرم $SABCD$ هو :<br>$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times S_{ABCD}$<br>$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times AB^2$<br>$V_2 = \frac{1}{3}\times 4\times3\times3$<br>$V_2 = 12\,cm^3$<br>بالتالي حجم هذا المجسم هو :<br>$V = V_1 + V_2 = 27 + 12 = 39\,cm^3$ |  |
| 2- لنحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب. | |
| الحجم الحقيق هو :<br>$V' = 200^3 \times V$<br>$V' = 200\times200\times200\times39\,cm^3$<br>$V' = 312\,000\,000\,cm^3$<br>$V' = 312\,m^2$ | لأن : $1\,000\,000\,cm^3 = 1m^3$ |