الدرس السادس

الدوال الخطية - الدوال التآلفية

ملخـــــــــــــــــص الـــــــــــــــدرس

- **الدالة الخطية f هي العلاقة التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد ax مع a عدد حقيقي و نكتب :**

$$f(x) = a\,x$$

- **التمثيل المبياني للدالة الخطية f هو مستقيم يمر من أصل المعلم**
- **العلاقة التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد $a\,x + b$ تسمى دالة تآلفية معاملها a**

و نكتب $f(x) = a\,x + b$

- **إذا كان x_1 و x_2 عددين معلومين مختلفين فإن :** $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

التماريـــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

لتكن f دالة خطية معاملها a

1- بين أنه إذا كانت x_1 , x_2 , α و β أعداد حقيقية فإن:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

2- استنتج أن $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$

التمرين الثاني :

لتكن f بحيث :

$$-2(x + 3) + 3f(x) = -3\,(+2 + f(x))$$

1- بين أن f دالة خطية

2- بين أن $\dfrac{1}{7}f(7x) = f(x)$

3- حدد α و β إذا علمت أن التمثيل المبياني للدالة الخطية f يمر من :

$A(\alpha , 1)$ و $B(3 , \beta)$

التمرين الثالث :

لتكن f دالة خطية بحيث $f(1) = 5$

أحسب $f(2)$

يزيد إنتاج مصنع بمقدار 4% كل سنة

1- ليكن x إنتاج سمة معينة، بين أن إنتاج السنة الموالية هو صورة x بدالة خطية يتم تحديدها

2- إذا كان إنتاج سنة 2005 هو 5000 آلة، فما هو إنتاج سنة 2006؟

التمرين الرابع :

لتكن f دالة تآلفية بحيث $f(1) = 2$ و $f(-1) = 4$

1- حدد $f(2)$

2- نعتبر g دالة خطية بحيث $g(x) = k\,x$

حدد قيمة k بحيث Cf و Cg متوازيان

التمرين الخامس :

حدد الدالة التآلفية f التي تحقق لكل x :

1 – $f(2x-3) + 3f(2-x) = 3x$

2- أحسب α إذا علمت أن $f(\alpha) = 5$

التمرين السادس :

نعتبر الدالة التآلفية f :

$f(x) = (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3}$

1- هل النقطتان $A(1\ ,\ \sqrt{3}\ )$ و $B(0\ ,\ \sqrt{3}\ )$ تنتميان إلى التمثيل المبياني لدالة f ؟

2- أوجد قيم البارامتر m بحيث النقطة $C(m\ ,\sqrt{3}\,(m+1)$ الم تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f

هـــــــــــــــام جـــــــــــدا

- حياتك ليست مصادفةو لا تسير بموجب مبدأ المصادفة، بل يتم توجيهها من قبلك .
- عندما تعرف أهدافك تستطيع أن تنطلق على طريق حياتك الصاعد المحفوف بالأضواء .
- اشحن قواك بالطاقة الإيجابية التي تحس بها في غرفة من منزلك متسمة بالبشر و المرح و الباعثة للإطمئنان و الإنسجام، إبحث عن الطاقة الإيجابية في ذويك و أسرتك تلك التي يشعها واحد منهم و التي تشعرك بالقوة و الحيوية و الصحة و نزعة الإبداع، انظر لها في أساتذتك و أقرانك الذين يشع منهم الحماسة للعمل و الإستعداد و للإجتهاد و الرغبة في العطاء .

حـــــــــــــــل تماريـــــتن الـــــدوال الخـــــطية و التـــــــآلفية

حل التمرين الأول:

1- بما أن f دالة خطية فإنها تكتب على شكل $a \in IR ; f(x) = ax$

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = a(\alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$= \alpha a x_1 + \beta a x_2$$
$$= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

2- نضع $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ في علاقة السؤال (1)

تحصل على :

$$f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) = f(\frac{x_1 + x_2}{2})$$
$$= \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$$
$$= \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

حل التمرين الثاني:

لدينا :

$$-2x - 6 + 3f(x) = -6 - 3f(x)$$
$$-2x - 6 + 6 = -3f(x) - 3f(x)$$
$$-6f(x) = -2x$$
$$f(x) = \frac{-2x}{-6} = \frac{1}{3}x$$

و بالتالى f دالة خطية

2- بما أن f دالة خطية فإن $f(7x) = 7f(x)$

و بالتالي $\frac{1}{7}f(7x) = f(x)$

3- Cf يمر من النقطة $A(\alpha , 1)$ إذن $f(\alpha) = 1$

من جهة اخرى $f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha$

إذن $\frac{1}{3}\alpha = 1$ و منه فإن $\alpha = 3$

Cf يمر من $B(3 , \beta)$ يعني $f(3) = \beta$

يعني $\frac{1}{3} \times 3 = \beta$

إذن $\beta = 1$

حل التمرين الثالث:

لدينا f دالة خطية بحيث $f(1) = 5$

لدينا $f(x) = ax$; $f(1) = a \times 1 = a$

إذن $a = 5$

و بالتالي الدالة الخطية f تكتب على شكل $f(x) = 5x$

إذن قيمة $f(2)$ هي : $f(2) = 5 \times 2 = 10$

حل التمرين الرابع

1- ليكن x إنتاج سنة معينة

في السنة الموالية سيكون الإنتاج هو $x + (4\%)x$

و لدينا $4\% = \frac{4}{100} = 0,04$

و بالتالي سيكون الإنتاج هو $x + 0,04 = x\,(1 + 0,04)$

$= 1,04\,x$

إذن الإنتاج هو $1,04\,x$ الذي هو صورة x بدالة خطية هي f بحيث $f(x) = 1,04\,x$

2- بتطبيق مباشر للسؤال الأول باستخدام الدالة الخطية f التي تعطينا إنتاج السنة الموالية إذا عرفنا إنتاج السنة الأولى :

$f(5000) = 1,04 \times 5000 = 5200$

و بالتالي سيكون إنتاج السنة الموالية هو 5200 آلة

حل التمرين الخامس:

1- بما أن f دالة تآلفية فإنها تكتب على شكل :

$f(x) = a\,x + b$ مع $a , b \in IR$

لدينا $f(1) = a + b = 2$ و $f(-1) = -a + b = 4$ (1)

إذن $a = 2 - b$

ثم نعوض قيمة a في العلاقة (1)

$-(2 - b) + b = 4$

$2b - 2 = 4$

يعني $b = 3$

و $a = 2 - b = -1$

إذن $f(x) = -x + 3$

2- بما أن Cf و Cg متوازيان فإن لمعادلتي f و g نفس المعامل يعني أن $k = -1$

و بالتالي $g(x) = -x$

حل التمرين السادس:

بما أن f دالة تآلفية فإنها تكتب على شكل $f(x) = a\,x + b$

مع a و b عددان حقيقيان يجب تحديدهما

$f(2\,x - 3) = a\,(2\,x - 3) + b = 2\,a\,x + b - 3a$

$f(2 - x) = a\,(2 - x) + b = -a\,x + 2\,a + b$

نطبق العلاقة :

$2\,a\,x + b - 3a + 3\,(-a\,x + 2\,a + b) = 3\,x - 1$

يعني $2\,a\,x - 3\,a\,x + b - 3\,a + 6\,a + 3\,b - 3\,x - 1 = 0$

$-a\,x - 3\,x + 4\,b + 3\,a + 1 = 0$

$(-a - 3)\,x + 3\,a + 4\,b + 1 = 0$

بتطبق الخاصية التالية :

مهما يكن x بحيث $\alpha\,x + \beta = 0$

فإن $\alpha = 0$ و $\beta = 0$

إذن $-a - 3 = 0$ و $3\,a + 4\,b + 1 = 0$

يعني $a = -3$ و $3(-3) + 4\,b + 1 = 0$

$-9 + 4\,b + 1 = 0$

يعني $4\,b = 8$ إذن $b = 2$

و بالتالي $f(x) = -3\,x + 2$

2- لدينا $f(x) = 5$ يعني $-3\,\alpha + 2 = 5$

إذن $-3\,\alpha = 3$

$\alpha = -1$

حل التمرين السابع:

1- بصفة عامة $E(\alpha\,,\beta)$ تنتمي إلى Cf

إذا كان لدينا $f(\alpha) = \beta$

$f(1) = (\sqrt{3} + 1) \times 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1 \neq \sqrt{3}$

و باتالي $A \notin Cf$

$f(0) = (\sqrt{3} + 1) \times 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

إذن $B \in Cf$

2- C تنتمي إلى Cf إذ $f(m-1) = \sqrt{3}\,(m+1)$

إذن : $(\sqrt{3} + 1)\,(m - 1) + \sqrt{3} = \sqrt{3}\,(m + 1)$

$-\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}\,m + m + \sqrt{3} = \sqrt{3}\,m + \sqrt{3}$

$m = 1 + \sqrt{3}$