

## الدرس الرابع

# التكافؤ

ملخص الدرس

– a و b و k أعداد حقيقية :

– إذا كان  $a \leq b$  و  $k > 0$  فإن  $ka \leq kb$

– إذا كان  $a \leq b$  و  $k < 0$  فإن  $kb \leq ka$

– a و b عدنان حقيقيان موجبان :

$a \leq b$  تكافىء  $a^2 \leq b^2$

$a < b$  تكافىء  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

a و b عدنان حقيقيان :

$a \leq b$  تكافىء  $a - b \leq 0$

تحذير هام :

من أجل أن توظر مربع عدد  $a^2$  أو مقلوب عدد  $\frac{1}{a}$  يجب عليك قبل ذلك معرفة إشارته

التمارين الأولى :

التمرين الأول :

ليكن  $0 < a < b$  و  $k > 0$

$$(1) \frac{a}{b} < \frac{1+ka}{1+kb}$$

بين أن

$k a \geq k b$   $k < 0$   $a \leq b$

– إذا كان :

– إذا كان :  $0 < k < a < k'$

و  $0 < m < b < m'$

– إذا كان  $k < a < k'$

و b سالب :  $m < b < m' < 0$

– إذا كان a سالب :  $k < a < k' < 0$

و b سالب :  $m < b < m' < 0$

حذار جميع الأعداد ينبغي أن تكون موجبة قبل التناظر

$$a - b \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$$

$$\frac{a}{b} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$a \leq b$  يكافىء

– إذا كان a و b عددين موجبين قطعاً فإن :

$$a + c \leq b + c$$

$a \leq b$  تكافىء

– إذا كان a و b و c أعداد حقيقية فإن :

– إذا كان a و b موجبان

التمرين الثاني :

ليكن  $-1 < a < 1$  و  $0 < b < 3$   
بين أن  $-3 < ab < 3$

التمرين الثالث :

ليكن  $-1 < a < 2$   
بين أن  $-1 < a^2 + a < 6$

التمرين الرابع :

ليكن  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان بحيث :  
 $a + b = -3$  و  $-2 < a < 1$   
-1 بين أن  $-4 < b < -1$   
-2 أطر الأعداد التالية :  
 $a^2$  و  $\frac{1}{a-2}$  و  $\frac{a+3}{5-b}$

التمرين الخامس :

ليكن  $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$   
 $B = \frac{6 + \sqrt{3}}{11}$

1- بسط العدد  $A$

2- بين أن :

$$B - A = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66}$$

3- بين أن  $B < A$

التمرين السادس :

ليكن  $x \in \mathbb{R}^+$  تضع  $a = \frac{2x+5}{x+3}$  و  $b = \frac{2x+3}{x+2}$

1- بين أن  $a = 2 - \frac{1}{x+3}$  و  $b = 2 - \frac{1}{x+2}$

2- استنتج أن  $b < a$

التمرين السابع :

$$-2 < d < -1 \text{ و } 1 < b < \sqrt{3} \text{ و } 1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2} \text{ و } 1 - \sqrt{3} < c < \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

1- بين أن  $b < a$

2- حدد تآطير للعدد  $\frac{c}{a}$  و  $\frac{a}{c}$  و  $ad$

التمرين الثامن :

$$\text{ليكن } -6 \leq x \leq -2 \text{ و } -4 \leq y \leq$$

أوجد تآطيرا للأعداد التالية

$$y^2 - 1 \quad \text{و} \quad x + y$$

التمرين التاسع :

1- بين أن علما أن  $a \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2- استنتج أن

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{23}{16} \quad (20 > 10\sqrt{2})$$

التمرين العاشر :

$$\text{ليكن } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ و } -2 \leq y \leq -1 \text{ نضع } a = x + \frac{1}{x}$$

1- أعط 3 تآطير للعدد  $a^2$

$$\frac{\sqrt{55}}{3} \leq a \leq \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{2- بين أن :}$$

$$-\frac{13}{3} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{-13}{4} \quad \text{3- بين أن :}$$

## المخطط السنوي

هذا الجدول عبارة عن نموذج لمخطط سنوي يمكنك تعديل أو تغيير محتواه حسب احتياجاتك و حاجاتك .

المجالات	الأهداف	بدء الإنجاز	نهاية الإنجاز	حصيلة ما أنجز
الجانب الديني	- حفظ 10 أحزاب - صوم 6 من شوال - قيام ليلة واحدة على أقل في الأسبوع - كفالة يتيم مساعدة مادية أو معنوية	- 1 أكتوبر 2006 - شهر شوال - طيلة العام - طيلة العام	- 30 شتنبر 2007 - شهر شوال - طيلة العام - طيلة العام	- - - -
الجانب الدراسي	- النجاح بمعدل عالي - إتقان اللغة الفرنسية - تعلم كيفية البحث عن المعلومات - تعلم التهيء للدروس و الفروض	- 15 شتنبر 2006 - 15 شتنبر 2006 - طيلة السنة - طيلة السنة	- 30 يونيو 2007 - 15 شتنبر 2007 - طيلة السنة - طيلة السنة	- - - -
الجانب الثقافي العلمي	- المطالعة بالعربية و الفرنسية - المراسلات و الحورات مع الأشخاص - تعلم كيفية ترتيب الأفكار و طرحها عند النقاش - تعلم الرسم	- 15 شتنبر 2006 - طيلة السنة - طيلة السنة - من 1 يوليوز	- 15 شتنبر 2007 - طيلة السنة - طيلة السنة - 15 شتنبر	- - - -
الجانب الرياضي و الترفيهي	- لعب رياضة جماعية كرة سلة أو قدم - رياضة المشي خلال الصباح الباكر - ممارسة السباحة - الذهاب إلى المخيم - المشاركة في مسرحة من إنجاز دار الشباب - رحلات لإستكشاف جمال الطبيعة	- كل يوم أحد - كل يوم - فصل الصيف - من 1 غشت - أيام العطل - يوم واحد كل شهر	- كل يوم أحد - كل يوم - فصل الصيف - من 1 غشت - أيام العطل - يوم واحد كل شهر	- - - - - -
الجانب المادي المالي	- تعلم التجارة و كيفية بيع سلعة معينة - إخبار قدر معين حسب	- أيام العطل - كل شهر	- أيام العطل - كل شهر	- -

الإستطاعة  
- البحث من الآن عن الوسائل المشروعة للكسب عبر الأنترنت

الجانب النفسي  
- تذكير نفسي بالأهداف المسطرة في المخطط  
- محاسبة النفس يوميا قبل النوم  
- التفاعل، الرغبة، العزيمة، الصبر، الإصرار

- يوم في الشهر

- يوم في الشهر

- كل ليلة

- كل يوم

- يوم كل 15 يوما

- كل ليلة

- كلمات يجب تذكرها كل يوم

-

-

-

-

حل التمرين الأول:

في العلاقة (1) نضرب طرفا بطرف

$$a(1 + kb) < b(1 + ka)$$

$$a + akb < b + kba$$

$$a < b$$

يعني أن

إذن

نقوم بهذا لنصل إلى شيء في المعطيات  $a < b$

ثم نبدأ لدينا

$$a < b \Rightarrow k < 0$$

نضيف  $akb$  عند طرفين :

$$a + akb < b + akb$$

$$a(1 + kb) < b(1 + ka)$$

$$\frac{a(1 + kb)}{b} < 1 + ka$$

$$\frac{a}{b} < \frac{1 + ka}{1 + kb}$$

حل التمرين الثاني:

لدينا  $-1 < a < 1$  إذا أردنا أن نقوم بتأطير  $ab$  وجب معرفة إشارة  $a$

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < -a < 1 \text{ فإن } -1 < a < 0 \\ 0 < b < 3 \end{array} \right.$$

$$\text{إذن } 0 < -ab < 3$$

إذن

$$(1) \quad -3 < ab < 0$$

$$0 < a < 1$$

$$0 < b < 3$$

$$(2) \quad 0 < ab < 3$$

إذن

حسب (1) و (2) لدينا

$$-3 < 0 < ab < 3 < 0 < 3$$

$$-3 < ab < 3$$

حل التمرين الثالث:

$$\text{ليكن } -1 < a < 2$$

احذر لا يمكنك تأطير عدد مربع  $a^2$  دون معرفة إشارته

لذلك نتبع التأطير حسب الحالات:

2- تأطير  $a^2$

$$0 < -a < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < a < 0$$

$$0 < -a \times a < 4 \quad \text{إذن}$$

$$(1) \quad 0 < a^2 < 4$$

$$(2) \quad 0 < a^2 < 1 \quad \text{- إذا كان } 0 < a < 1 \text{ فإن:}$$

و بالتالي حسب (1) و (2) لدينا :

$$0 < a^2 < 1 < 4$$

$$0 < a^2 < 4$$

إذن :

- تأطير  $\frac{a+3}{5-b}$

$$1 < a + 3 < \quad \text{لدينا}$$

$$1 < -b < 4 \quad \text{و}$$

$$6 < 5 - b < 9$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{5-b} < \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{4}{6}$$

$$0 < -a < 1 \quad \text{فإن} \quad -1 < a < 0 \quad \text{إذا}$$

$$0 < -a < 1 \quad \text{كان}$$

$$0 < -a \times -a < 1 \quad \text{بضرب أطراف العلاقتين}$$

$$0 < a^2 < 1 \quad \text{يعني}$$

$$(1) \quad -1 < a^2 + a < 1 \quad \text{ثم}$$

$$0 < a^2 < 4 \quad \text{فإن} \quad 0 < a < 2 \quad \text{- إذا كان}$$

$$(2) \quad 0 < a^2 + 2 < 6$$

(1) و (2) نستنتج أن:

حسب العلاقتين

$$-1 < 0 < a^2 + a < 1 < 6$$

$$-1 < a^2 + a < 6$$

إذن

حل التمرين الرابع:

$$b = -3 - a \quad \text{-1 لدينا :}$$

$$-2 < a < 1 \quad \text{لدينا}$$

$$-1 < -a < 2 \quad \text{إذن}$$

$$-4 < -3 - a < -1$$

$$-4 < b < -1 \quad \text{يعني}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3}{9 - 3}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$B - A = \frac{6 + \sqrt{3}}{11} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \quad -2$$

$$= \frac{36 + 6\sqrt{3} - 33 - 11\sqrt{3}}{66}$$

$$= \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66}$$

$$B - A = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66} \quad -3 \text{ لدينا}$$

من أجل أن نبين أن  $B < A$  يكفي أن يكون  $B - A < 0$

$$\begin{cases} \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66} < 0 \\ 3 - 5\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

يعني

أو

$$3 < 5\sqrt{3} \quad \text{أو}$$

$$3 < 5\sqrt{3} \quad \text{إذن يكفي أن نبين أن}$$

$$3^2 < (5\sqrt{3})^2 \quad \text{نرفع إلى المربع :}$$

وهذا في الهامش

$$\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{2}{3}$$

- تأطير  $\frac{1}{a-2}$

احذر لا يمكن تأطير  $\frac{1}{a-2}$  دون معرفة إشارة  $a-2$

لدينا  $-2 < a < 1$

إذن  $-4 < a-2 < -1$

احذر لا يمكن قلب عدد داخل التأطير إلا إذا كان موجب

لذلك  $1 < -(a-2) < 4$

إذن  $\frac{1}{4} < \frac{+1}{-(a-2)} < 1$

إذن  $\frac{1}{4} < \frac{-1}{a-2} < 1$

$$-1 < \frac{1}{a-2} < \frac{-1}{4}$$

حل التمرين الخامس:

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

-1 لدينا

$$= \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2x+3}{x+2}$$

$$= b$$

$$a - b = 2 - \frac{1}{x+3} - 2 + \frac{1}{x+2}$$

-2 لدينا

$$= \frac{-x-2+x+3}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

$$x+2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \text{لدينا}$$

$$x+3 > 0 \quad \text{و}$$

$$a - b > 0 \quad \text{إذن:}$$

$$a > b$$

$$b < a \quad \text{و منه فإن:}$$

### حل التمرين السابع:

$$-1 \text{ من أجل البرهنة أن } b < a \text{ يكفي أن نبين أن } \frac{b}{a} < 1$$

و بالتالي يجب تأطير العدد  $\frac{b}{a}$

$$1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$$

لدينا

$$9 < 25 \times 3$$

يعني

$$9 < 75$$

لدينا:

$$9 < 75$$

$$3^2 < 5^2 \times 3$$

يعني

$$\sqrt{3^2} < \sqrt{5^2 \times 3}$$

إذن

$$3 < 5\sqrt{3}$$

يعني

$$3 - 5\sqrt{3} < 0$$

إذن

و بالتالي  $B < A$  إذن  $B - A < 0$

### حل التمرين السادس:

$$2 - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3) - 1}{x+3}$$

-1 لدينا

$$= \frac{2x+6-1}{x+3}$$

$$= \frac{2x+5}{x+3}$$

$$= a$$

$$2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+3) - 1}{x+2}$$



$$(2) \quad \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} < \frac{c}{a} < \frac{-1}{8}$$

إذن:

تأطير  $\frac{a}{c}$  من خلال التأطير (2)

$$\frac{1}{\frac{-1}{8}} < \frac{1}{\frac{c}{a}} < \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

لدينا

$$-8 < \frac{a}{c} < \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

تأطير  $a \times b$

$$-2 < b < -1 \quad \text{لدينا}$$

$$1 < -b < 2$$

إذن:

$$1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$$

و

$$1 + \sqrt{3} < -ab < 4$$

إذن:

$$-4 < ab < -1 - \sqrt{3}$$

و بالتالي

**حل التمرين الثامن:**

$$-4 \leq y \leq 3$$

و

$$-6 \leq x \leq -2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

إذن

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

إذن

$$\sqrt{3} < 1 + \sqrt{3}$$

من جهة أخرى لدينا

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$$

إذن

$$b < a$$

و بالتالي

$$\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

إذن:

2- تأطير للعددين  $\frac{a}{c}$  و  $\frac{c}{a}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$1 - \sqrt{3} < c < \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad \text{لدينا } c \text{ عدد سالب:}$$

حذار من تأطير جداء عدد سالب  $\times$  عدد موجب

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < -c < \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) < -c \times \frac{1}{a} < \sqrt{3} - 1 \times \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

إذن

$$\frac{1}{8} < \frac{-c}{a} < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

### حل التمرين التاسع :

$$1- \text{بين أن } \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

من أجل ذلك نبين أن :

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \times \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+1-a}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$(1) 2\sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$$

يكافئ

$$a < a+1$$

لدينا

$$\sqrt{a} < \sqrt{a+1}$$

إذن

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a+1}$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$$

$$-10 \leq x + y \leq 1$$

احذر أن تأطر عددا مربعا دون أن يكون موجبا

$$0 \leq -y \leq 4 \quad \text{فإن} \quad -4 \leq y \leq 0 \quad \text{إذا كان}$$

$$0 \leq -yx - y \leq 16 \quad \text{إذن}$$

$$0 \leq y^2 \leq 16$$

$$(1) \quad -1 \leq y^2 - 1 \leq 15$$

$$0 \leq y \leq 3$$

- إذا كان

$$(2) \quad 0 \leq y^2 \leq 9$$

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 8$$

حسب (1) و (2) فإن

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 8 \leq 15$$

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 15$$

و بالتالي

$$\frac{1}{8} < 3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow \quad a = 1$$

نعوض

$$-\frac{23}{8} < -2\sqrt{2} < -\frac{11}{4}$$

$$-\frac{23}{16} < 2\sqrt{2} < -\frac{11}{8}$$

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

حل التمرين العاشر:

$$a = x + \frac{1}{x}$$

لدينا

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

لدينا

$$\frac{1}{9} \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$4 \leq \frac{1}{x^2} \leq 9$$

و

$$a < a + 1$$

من جهة أخرى لدينا

$$\sqrt{a} < \sqrt{a + 1}$$

إذن

$$\sqrt{a} - \sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a}$$

إذن

$$2\sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a}$$

يعني

$$2\sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a + 1}$$

و بالتالي

$$\frac{1}{2\sqrt{a + 1}} < \frac{1}{\sqrt{a + 1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2- إذا عوضنا  $a = 1$  في التأيير الأول :

$$\frac{1}{2\sqrt{a + 1}} < \sqrt{a + 1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

نرفع التأيير

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{a + 1}}\right)^2 < (\sqrt{a + 1} - \sqrt{a})^2 < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

إلى المربع

$$\frac{1}{4(a + 1)} < a + 1 - 2\sqrt{a(a + 1)} + a < \frac{1}{4a}$$

$$\frac{1}{4(a + 1)} < 2a + 1 - 2\sqrt{a(a + 1)} < \frac{1}{4a}$$

$$-\frac{13}{3} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -\frac{13}{4}$$

من (1) و (2)

$$\frac{1}{9} + 4 + 2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \leq \frac{1}{4} + 9 + 2$$

إذن

$$\frac{55}{9} \leq a^2 \leq \frac{45}{4}$$

$$\sqrt{\frac{55}{9}} \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{\frac{45}{4}}$$

2- لدينا

$$\frac{\sqrt{55}}{3} \leq a \leq \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$[45 = 5 \times 3^2; \sqrt{45} = \sqrt{5} \times 3]$$

$$-1 \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{2}$$

إذن

$$-2 \leq y \leq -1$$

3- لدينا

$$\frac{1}{3} \times -1 \leq x \times \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}$$

يعني

(1)

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{4}$$

$$2 \leq \frac{1}{x} \leq 3$$

$$-2 \leq y \leq -1$$

(2)

$$-4 \leq \frac{x}{y} \leq -3$$

إذن