

## الترتيب و العمليات

### تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان حيث:  $x \leq y$

① قارن  $3x - 7y$  و  $-5y + x$

② قارن  $\frac{7x - 11y}{2}$  و  $-\frac{2y + 8x}{5}$

### تمرين 2

x و y و z و t و k أعداد حقيقية حيث:

أطر التعبيرات الآتية :

$-9 \leq k \leq -2$	$-10 \leq t \leq 1$	$2 \leq z \leq 5$	$-7 \leq y \leq -4$	$3 \leq x \leq 6$	
$-y + 5x$	$6t + 2y$	$z - x$	$x - y$	$z + t$	$x + y$
$x + y - t + 6z + 13$	$-4y - 16$	$-4t$	$10y$	$-6y$	$5x$
$yk$	$xy$	$xz$	$t^2$	$y^2$	$x^2$
		$\frac{y^2 + 5}{t - 10}$	$\frac{x - t}{y + 10z}$	$\frac{y}{z}$	$\frac{z}{x}$

### تمرين 3

قارن كل عددين مما يلي :

$20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	$-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$
$\sqrt{27} + 1$ و $3 + \sqrt{3}$	$6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$	$\sqrt{17} - \sqrt{11}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{40}$	

### تمرين 4

إذا علمت أن :  $\begin{cases} 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \end{cases}$  فاعط تأطيرا للعددين :  $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$  و  $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

## الترتيب و العمليات - حلول

### تمرين 1 انتبه تعليق

معطيات :  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان حيث :  $x \leq y$

<p style="text-align: center;">② لنقارن <math>\frac{7x-11y}{2}</math> و <math>-\frac{2y+8x}{5}</math></p> <p style="text-align: center;">لدينا :</p> $\frac{7x-11y}{2} + \frac{2y+8x}{5} = \frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$ $= \frac{35x-55y+4y+16x}{10} = \frac{51x-51y}{10} = \frac{51(x-y)}{10}$ <p style="text-align: center;">و بما أن <math>x \leq y</math> فإن <math>x-y \leq 0</math> منه <math>\frac{51(x-y)}{2} \leq 0</math></p> <p style="text-align: center;">بالتالي : <math>\frac{7x-11y}{2} \leq -\frac{2y+8x}{5}</math></p>	<p style="text-align: center;">① لنقارن <math>3x-7y</math> و <math>-5y+x</math></p> <p style="text-align: center;">لدينا :</p> $(-5y+x) - (3x-7y) = -5y+x-3x+7y$ $= -2x+2y = 2(-x+y) = 2(y-x)$ <p style="text-align: center;">و بما أن <math>x \leq y</math> فإن <math>x-y \leq 0</math> منه <math>2(x-y) \leq 0</math></p> <p style="text-align: center;">بالتالي : <math>-5y+x \leq 3x-7y</math></p>
--	--

### تمرين 2 انتبه تعليق

معطيات	معدلات	معدلات	معدلات	معدلات	معدلات
$3 \leq x \leq 6$	$-7 \leq y \leq -4$	$2 \leq z \leq 5$	$-10 \leq t \leq 1$	$-9 \leq k \leq -2$	معدلات
لنؤطر $x+y$	لنؤطر $x-y$	لنؤطر $6t+2y$			
لدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $-7+3 \leq x+y \leq -4+6$ إذن : $-4 \leq x+y \leq 2$	لدينا : $x-y = x+(-y)$ ولدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ ولدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $3+4 \leq x+(-y) \leq 6+7$ بالتالي : $7 \leq x-y \leq 13$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$ لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-14 \leq 2y \leq -8$ إذن : $-60+(-14) \leq 6t+2y \leq 6+(-8)$ بالتالي : $-74 \leq 6t+2y \leq -2$			
لنؤطر $z+t$	لنؤطر $z-x$	لنؤطر $-y+5x$			
لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $-10 \leq t \leq 1$ إذن : $2+(-10) \leq z+t \leq 5+1$ إذن : $-8 \leq z+t \leq 6$	لدينا : $z-x = z+(-x)$ ولدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $-6 \leq -x \leq -3$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ إذن : $2+(-6) \leq z+(-x) \leq 5+(-3)$ بالتالي : $-4 \leq z-x \leq 2$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$ إذن : $4+15 \leq -y+5x \leq 7+30$ بالتالي : $19 \leq -y+5x \leq 37$			
لنؤطر $5x$	لنؤطر $x^2$	لنؤطر $-4y-16$			
لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$	لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $9 \leq x^2 \leq 36$	لدينا : $-4y-16 = -4y+(-16)$ لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$ لدينا : $16+(-16) \leq -4y+(-16) \leq 28+(-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y-16 \leq 12$			
لنؤطر $6y$	لنؤطر $y^2$	لنؤطر $x+y-t+6z+13$			
لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $24 \leq -6y \leq 42$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$	لدينا : $x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و : $-7 \leq y \leq -4$ ولدينا : $-1 \leq -t \leq 10$ منه : $-10 \leq t \leq 1$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $12 \leq 6z \leq 30$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \leq x+y+(-t)+6z+13 \leq 55$			
لنؤطر $10y$	لنؤطر $-4t$				
لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-70 \leq 10y \leq -40$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$				
تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.					
لانستطيع تأطير $y^2$ مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \leq y \leq -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2 = y^2$					

لنؤطر $yk$	لنؤطر $xz$	لنؤطر $t^2$
لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $3 \times 4 \leq x \times (-y) \leq 6 \times 7$ منه : $12 \leq -xy \leq 42$ بالتالي : $-42 \leq xy \leq -12$	لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $2 \leq z \leq 5$ منه : $6 \leq xz \leq 30$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-10 \leq t \leq 0$ أو $0 \leq t \leq 1$ $0 \leq -t \leq 10$ أو $0 \leq t \leq 1$ منه $0 \leq (-t)^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ منه $0 \leq t^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ بالتالي : $0 \leq t^2 \leq 100$
🔍 ← بما أن قاعدة تأطير جداء	🔍 ← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير $xy$ ، لكننا استفدنا من كون : $(-x) \times (-y) = xy$	🔍 ← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد $t$ مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر $t$ في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.
🔍 ← بما أن قاعدة تأطير جداء ، تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \leq -y \leq 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن $y$ سالب) ، مما سمح لنا بتأطير الجداء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير $xy$ .	🔍 ← تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير وليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.	
لنؤطر $\frac{y}{z}$	لنؤطر $\frac{z}{x}$	لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$
لدينا : $\frac{y}{z} = y \times \frac{1}{z}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$ منه : $4 \times \frac{1}{5} \leq (-y) \times \frac{1}{z} \leq 7 \times \frac{1}{2}$ أي : $\frac{4}{5} \leq \frac{-y}{z} \leq \frac{7}{2}$ بالتالي : $-\frac{7}{2} \leq \frac{y}{z} \leq -\frac{4}{5}$	لدينا : $z = z \times \frac{1}{x}$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ منه : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $2 \times \frac{1}{6} \leq z \times \frac{1}{x} \leq 5 \times \frac{1}{3}$ بالتالي : $\frac{2}{6} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$	لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z}$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$ ولدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $2 \leq x+(-t) \leq 16$ لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $20 \leq 10z \leq 50$ ولدينا : $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $13 \leq y+10z \leq 46$ إذن : $\frac{1}{46} \leq \frac{1}{y+10z} \leq \frac{1}{13}$ منه : $2 \times \frac{1}{46} \leq (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z} \leq 16 \times \frac{1}{13}$ بالتالي : $\frac{1}{23} \leq \frac{x-t}{y+10z} \leq \frac{16}{13}$
	لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5) \times \frac{1}{t+(-10)}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $16 \leq y^2 \leq 49$ أي : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ منه : $21 \leq y^2+5 \leq 54$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-20 \leq t-10 \leq -9$ منه : $9 \leq -(t-10) \leq 20$ منه : $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{-(t-10)} \leq \frac{1}{9}$ إذن : $21 \times \frac{1}{20} \leq (y^2+5) \times \frac{1}{-(t-10)} \leq 54 \times \frac{1}{9}$ أي : $\frac{21}{20} \leq \frac{-(y^2+5)}{t-10} \leq 6$ بالتالي : $-6 \leq \frac{(y^2+5)}{t-10} \leq -\frac{21}{20}$	🔍 ← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فنأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جداءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

تمرين 3 ← انتبه ← تعليق

<p>لنقارن <math>\sqrt{2} + \sqrt{3}</math> و <math>\sqrt{5}</math></p> <p>لدينا : <math>(\sqrt{5})^2 = 5</math></p> <p>و <math>(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2</math></p> <p><math>= 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}</math></p> <p>بما أن : <math>5 + 2\sqrt{6} &gt; 5</math></p> <p>فإن : <math>\sqrt{2} + \sqrt{3} &gt; \sqrt{5}</math></p>	<p>لنقارن <math>-2\sqrt{10}</math> و <math>-\sqrt{3}</math></p> <p>لدينا : <math>(\sqrt{3})^2 = 3</math></p> <p>و <math>(2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40</math></p> <p>بما أن : <math>40 &gt; 3</math></p> <p>فإن : <math>2\sqrt{10} &gt; \sqrt{3}</math></p> <p>بالتالي : <math>-2\sqrt{10} &lt; -\sqrt{3}</math></p>	<p>لنقارن <math>3\sqrt{5}</math> و <math>\sqrt{37}</math></p> <p>لدينا : <math>(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45</math> و <math>(\sqrt{37})^2 = 37</math></p> <p>بما أن : <math>45 &gt; 37</math></p> <p>فإن : <math>3\sqrt{5} &gt; \sqrt{37}</math></p>
<p>لنقارن <math>6 + \sqrt{5}</math> و <math>6 + \sqrt{3}</math></p> <p>لدينا <math>\sqrt{5} &gt; \sqrt{3}</math> منه : <math>6 + \sqrt{5} &gt; 6 + \sqrt{3}</math></p>	<p>لنقارن <math>20\sqrt{2}</math> و <math>-7\sqrt{14}</math></p> <p>لدينا : <math>20\sqrt{2} &gt; 0</math> و <math>-7\sqrt{14} &lt; 0</math></p> <p>منه : <math>20\sqrt{2} &gt; -7\sqrt{14}</math></p>	<p>لنقارن <math>\sqrt{17} - \sqrt{11}</math> و <math>\sqrt{5} - \sqrt{40}</math></p> <p>لدينا <math>\sqrt{5} &lt; \sqrt{40}</math> منه <math>\sqrt{5} - \sqrt{40} &lt; 0</math></p> <p>لدينا <math>\sqrt{17} &gt; \sqrt{11}</math> منه <math>\sqrt{17} - \sqrt{11} &gt; 0</math></p> <p>بالتالي : <math>\sqrt{5} - \sqrt{40} &lt; \sqrt{17} - \sqrt{11}</math></p>
<p>لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة <math>\sqrt{5}</math> و <math>\sqrt{3}</math> لوجود العدد 6 في كلتا العددين.</p>	<p>لنقارن <math>3 + \sqrt{3}</math> و <math>\sqrt{27} + 1</math></p> <p>لدينا : <math>(3 + \sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2</math></p> <p><math>= 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}</math></p> <p>و <math>(\sqrt{27} + 1)^2 = (\sqrt{27})^2 + 2 \times \sqrt{27} \times 1 + 1^2</math></p> <p><math>= 27 + 2\sqrt{9 \times 3} + 1 = 28 + 6\sqrt{3}</math></p> <p>بما أن : <math>12 + 6\sqrt{3} &lt; 28 + 6\sqrt{3}</math></p> <p>فإن : <math>3 + \sqrt{3} &lt; \sqrt{27} + 1</math></p>	<p>لنقارن <math>20\sqrt{2}</math> و <math>-7\sqrt{14}</math></p> <p>لدينا : <math>20\sqrt{2} &gt; 0</math> و <math>-7\sqrt{14} &lt; 0</math></p> <p>منه : <math>20\sqrt{2} &gt; -7\sqrt{14}</math></p>
<p>السالب، لذلك لا نقارن المربعات</p>	<p>لدينا : <math>20\sqrt{2} &gt; 0</math> و <math>-7\sqrt{14} &lt; 0</math></p> <p>منه : <math>20\sqrt{2} &gt; -7\sqrt{14}</math></p>	<p>بالتالي : <math>\sqrt{5} - \sqrt{40} &lt; \sqrt{17} - \sqrt{11}</math></p>

تمرين 4 ← انتبه ← تعليق

<p>معطيات : <math>1,42 &lt; \sqrt{2} &lt; 1,41</math> و <math>2,23 &lt; \sqrt{5} &lt; 2,24</math></p>	
<p>① لنؤطر <math>A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}</math></p>	<p>② لنؤطر <math>B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}</math></p>
<p>لدينا : <math>7,05 &lt; 5\sqrt{2} &lt; 7,1</math> منه <math>1,41 &lt; \sqrt{2} &lt; 1,42</math></p> <p>و لدينا : <math>4,46 &lt; 2\sqrt{5} &lt; 4,48</math> منه <math>2,23 &lt; \sqrt{5} &lt; 2,24</math></p> <p>بالتالي : <math>11,51 &lt; 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} &lt; 11,58</math></p> <p>أي : <math>11,51 &lt; A &lt; 11,58</math></p>	<p>لنيسط <math>B</math> أولاً:</p> <p><math>B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + 5}{5} = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{5} = \sqrt{5} + 1</math></p> <p>لدينا : <math>2,23 &lt; \sqrt{5} &lt; 2,24</math> منه : <math>3,23 &lt; \sqrt{5} + 1 &lt; 3,24</math></p> <p>بالتالي : <math>3,23 &lt; B &lt; 3,24</math></p>