Chapitre ⑥ : Vecteurs et translation

I _ Vecteur :

1) Les éléments d'un vecteur non nul :

a _ Définition :

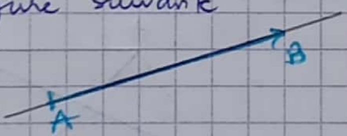
A et B deux points distincts du plan
Le couple de point (A,B) définie un vecteur qu'on note $\overrightarrow{AB}$, ses éléments sont :

* Direction : est la droite (AB)
* Sense est le sens du demi droit [AB) donc de A vers B
* Norme (Module) est la distance (Longueur AB)

- Le point A est appelée origine de $\overrightarrow{AB}$
- Le point B est appelée extrémité de $\overrightarrow{AB}$

b _ figure géométrique :

On considère la figure suivante
$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur



2) Vecteur nul :

* Définition : Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction, n'a pas de sens et de norme 0, on l'appelle vecteur nul et on note :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

- Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $A = B$
(càd les points A et B sont confondus)

3) Opposé d'un vecteur :

a _ Définition :

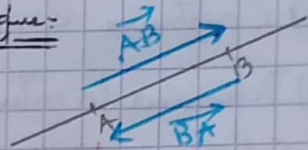
A et B deux points du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

b _ figure géométrique :

On a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



II _ Egalité de deux vecteurs :

1) Définition :

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont :

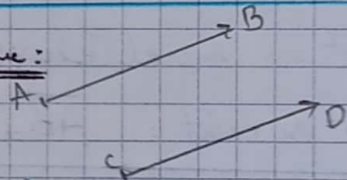
* même direction.
* même sens
* même norme.

Autrement dit, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction càd $(AB)//(CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même norme (Longueur) càd $AB = CD$

* figure géométrique :

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



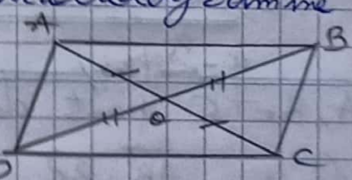
2) Propriétés importantes :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est parallélogramme
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que les segments [AC] et [BD] ont même milieu.

* figure géométrique :

ABCD est un parallélogramme

donc $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$



* Les diagonals [AC] et [BD] ont même milieu O

3) Application :

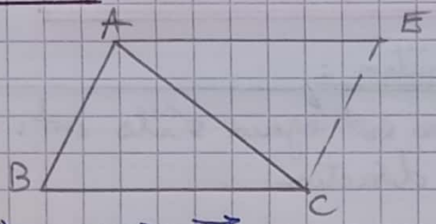
Soit ABC un triangle

1) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$

2) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCE$

*** Solution :**

1)



2) On a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$

donc $ABCE$ est un parallélogramme.

III _ Somme de deux vecteurs :

1) Définition :

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ si $ABCD$ est un parallélogramme

et on écrit : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

*** Figure géométrique :**

$ABCD$ est un parallélogramme

donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

et on a aussi

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\end{cases}$$

2) Relation de Chasles :

a - Propo :

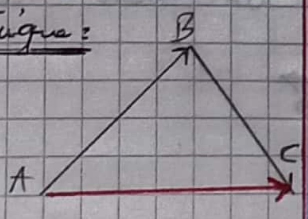
A, B et C points du plan

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Cette égalité s'appelle relation de chasles.

b - figure géométrique :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



b - Exemples :

* $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$

* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\vec{0}+\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{DB}$

3) Exercice d'application :

$ABCD$ parallélogramme

1) Construire les points M et N tel que :
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$

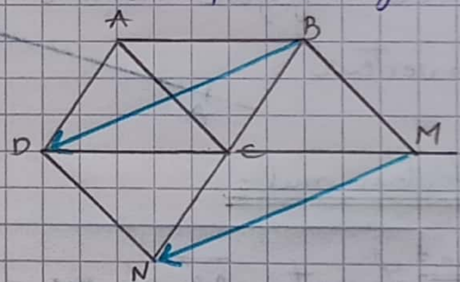
*** Solution :**

1) On a : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

donc $ABMC$ est parallélogramme

et on a : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

donc $ACND$ est parallélogramme



2) On a $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BD}$

On déduit que : $\boxed{\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}}$

4) Somme de plusieurs vecteurs :

a - Propo :

$\overrightarrow{AB}$ est vecteur, a un nombre entier naturel

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

$\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\dots+\overrightarrow{AB}}_{a\text{ fois}}=a\,\overrightarrow{AB}$

b- Remarque :

Pour sommer trois vecteurs (ou plus), on additionne deux vecteurs parmi eux, et on ajoute à leur somme le troisième vecteur, cela en utilisant la translation pour appliquer la relation de Chasles.

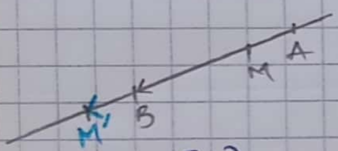
IV - La translation :

1) Activité :

A, B et M trois points du plan

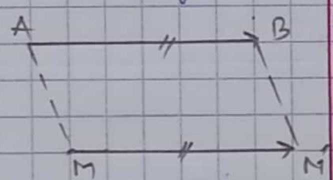
Construire dans chaque cas le point M′ telque : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Cas ①: points alignés



$\begin{cases} M' \in (AB) \\ AB = MM' \end{cases}$

Cas ② : points non alignés



ABM′M parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M′ est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou bien qui transforme A en B)

2) Définition

$\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul

Le point M′ est l'image du point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou bien qui transforme A en B)

Signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Signifie que : ABM′M parallélogramme.

3) Méthode de construction :

A, B deux points du plan, M point du plan, le point M′ est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Si $M \in (AB)$

Alors : $M' \in (AB)$ telque $AB = MM'$

2) Si $M \notin (AB)$

Alors M′ est le quatrième sommet du parallélogramme ABM′M (le compas)

* Paragraphe supplémentaire :

Multiplication d'un vecteur par un nombre rationnel.

1) Définition :

$\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un nombre rationnel

On appelle le vecteur $\overrightarrow{AM}$ produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k et on écrit $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

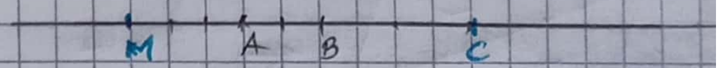
Si M est un point de la droite (AB) telque :

* Si $k > 0$ alors $AM = kAB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont même sens (càd $M \in [AB)$)

* Si $k < 0$ alors $AM = -kAB$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont deux sens opposés (càd $M \in [BA)$)

2) Exemple

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



* $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

$\begin{cases} - C \in (AB) \\ - \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ont même sens} \\ - AC = 3AB \end{cases}$

* $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\begin{cases} - M \in (AB) \\ - \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont sens opposés} \\ - AM = \frac{3}{2}AB \end{cases}$