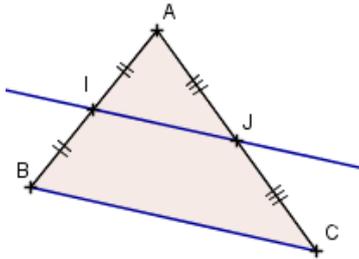


Triangles, milieux et parallèles

I. Propriété de la droite des milieux

Propriété :

Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.



Dans le triangle ABC :

✓ I milieu de [AB]

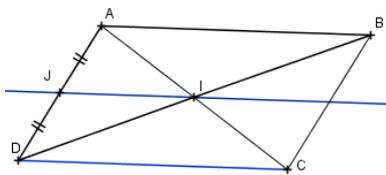
✓ J milieu de [AC]

la propriété nous permet de **démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).**

Application n°1 :

ABCD est un parallélogramme. I est le point d'intersection de ses diagonales et J est le milieu de [AD].

Montrer que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.



Solution :

On sait que ABCD est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Donc I est le milieu de [AC] (et de [BD])

Dans le triangle ACD,

on sait que I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AC].

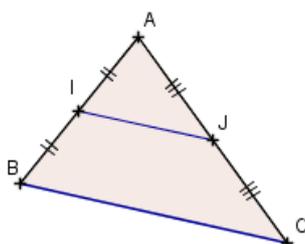
Or, si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

II. Propriété d'un segment d'extrémités deux milieux de côtés

Propriété :

Si, un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



Dans le triangle ABC :

✓ I milieu de [AB]

✓ J milieu de [AC]

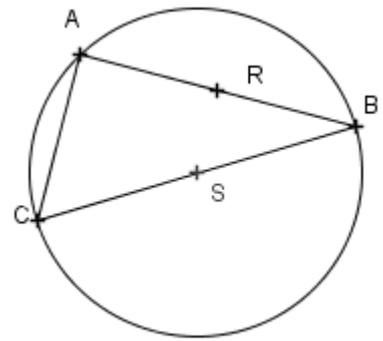
la propriété nous permet de **démontrer que : $IJ = \frac{BC}{2}$**

Application n°2 :

Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle de diamètre [BC].

On a :

- ✓ S est le milieu de [BC]
- ✓ R est le milieu de [AB]
- ✓ $AB = 8 \text{ cm}$ et $BC = 10 \text{ cm}$.



1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Calculer la longueur AC.
3. En déduire la longueur RS.

Solution :

1. On sait que le point A appartient au cercle de diamètre [BC].

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre un de ses côtés, alors il est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

Donc **ABC est rectangle en A.**

2. On sait que le triangle ABC est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{Donc } 10^2 = 8^2 + AC^2$$

$$\text{Donc } AC^2 = 100 - 64$$

$$AC^2 = 36$$

$$\text{Donc } AC = \sqrt{36} \text{ cm}$$

$$\text{AC} = 6 \text{ cm.}$$

3. Dans le triangle ABC, on sait que R et S sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].

Or, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

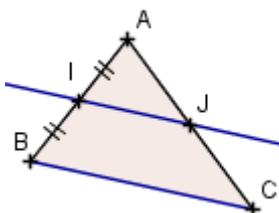
$$\text{Donc } RS = \frac{AC}{2},$$

$$\text{soit } RS = \frac{6}{2} \text{ cm.}$$

$$\text{D'où } \text{RS} = 3 \text{ cm.}$$

III. Un milieu et une parallèle**Propriété :**

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté ET est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.



Dans le triangle ABC :

- ✓ I milieu de [AB]
- ✓ $J \in [AC]$
- ✓ $(IJ) \parallel (BC)$

la propriété nous permet de **démontrer que :**

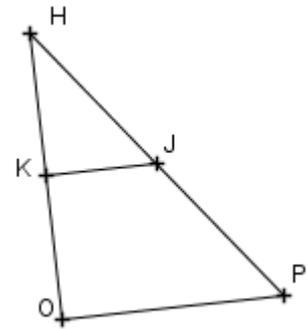
J est le milieu de [AC]

Application n°3 :

Sur la figure ci-contre :

- ✓ Le triangle HKJ est rectangle en K ;
- ✓ K est le milieu du segment [HO] ;
- ✓ $HO = 4,8$ cm, $OP = 3,6$ cm et $HP = 6$ cm.

1. Démontrer que le triangle HOP est rectangle.
2. En déduire que les droites (KJ) et (OP) sont parallèles.
3. Démontrer que le point J est le milieu du segment [HP].

**Solution :**

1. Le plus grand côté de HOP est [HP]

$$\text{D'une part } HP^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{D'autre part } HO^2 + OP^2 = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$$

$$\text{Donc : } HP^2 = HO^2 + OP^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle HOP est rectangle en O.

2. On sait que les droites (KJ) et (OP) sont perpendiculaires à la même droite (OH).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (KJ) et (OP) sont parallèles.

3. Dans le triangle HOP, on sait que : K est le milieu de [HO]

$$J \in [HP]$$

$$(KJ) // (OP).$$

Or, si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Donc le point J est le milieu du segment [HP].