

TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE

11

Objectifs d'apprentissage

- ✂ Connaître la propriété du triangle rectangle et son cercle circonscrit.
- ✂ Connaître le théorème de Pythagore.
- ✂ Calculer le carré de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.
- ✂ Connaître le COSINUS d'un triangle rectangle.

Gestion du temps

🕒 10 heures

Prérequis

- ⊗ Le cercle.
- ⊗ Le triangle rectangle.
- ⊗ Les droites remarquables dans un triangle.
- ⊗ Effectuer des calculs sur des nombres rationnels.

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.
- ♣ Compas, Equerre, Rapporteur.

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

◆ Niveau : 2^{ème} APIC

◆ Matière : Mathématiques

◆ Etablissement : Collège Nahda

Activité 1: ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de $[BC]$.

- 1) Construire la figure.
- 2) Soit (Δ) la médiatrice de segment $[AB]$, montrer que I appartient à (Δ) ?
- 3) Conclure que : $IA = IB = IC$.
- 4) Construire le cercle (C) de centre I et de rayon IA .
- 5) Que remarques-tu ?

Activité 2: 1) Construis un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

- 2) Soient M et N deux points de cercle (C) .
- 3) Que remarques-tu à propos les triangles ABM et ABN ?

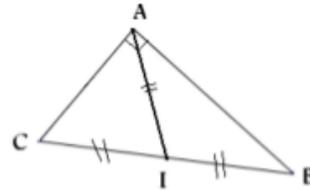
I- Triangle rectangle et cercle :

1) Milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

*** Propriété :** Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant de ses sommets.

*** Exemple :** ABC est un triangle rectangle en A , et I le milieu du segment $[BC]$.

Donc : $IA = IB = IC$



*** Propriété réciproque :** ABC est un triangle et I le milieu du segment $[BC]$.

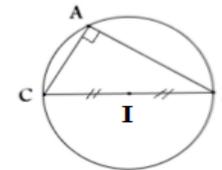
Si : $IA = IB = IC$ alors ABC est un triangle rectangle en A .

2) Cercle circonscrit à un triangle rectangle :

*** Propriété :** Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

*** Exemple :** ABC est un triangle rectangle en A , et I le milieu du segment $[BC]$.

Donc : $IA = IB = IC$, alors I est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC .



*** Propriété réciproque :** Si le milieu d'un côté d'un triangle est le centre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.

Exercice 1: Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $AC = 5\text{cm}$.

- 1) Construis M le milieu de $[AC]$.
- 2) Calcule : MB et MA .
- 3) Déduis-en la nature du triangle MBA .

Exercice 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A , tel que : $BC = 4\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 43^\circ$.

- 1) Construis E le milieu de $[BC]$.
- 2) Calcule : EB et EC .
- 3) Quelle est la nature du triangle EBA ?
- 4) Déduis-en la mesure de l'angle \widehat{EAB} .

Exercice 3 : ABC est un triangle rectangle en C et ABD est un triangle rectangle en D et le point O est le milieu de $[AB]$.

- 1) Construis la figure.
- 2) Montre que : $OC = OD$.

Exercice 4 : EFG est un triangle isocèle en E , et H le symétrique du point F par rapport au point E .

- 1) Construis la figure.
- 2) Quelle est la nature du triangle FGH ?

Activité 3 : ABC est un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$.

- 1) Compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$.
- 2) Construis le triangle ABC .
- 3) Que remarquez-vous pour la nature du triangle ABC ?

II- Théorème de Pythagore :

*** Théorème :** Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

*** Exemple :** ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8 \text{ cm}$; $AC = 6 \text{ cm}$.

Calculer BC ?

→ On a : ABC est un triangle rectangle en A .

Donc : d'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

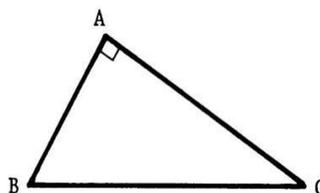
C'est-à-dire : $BC^2 = 8^2 + 6^2$

C'est-à-dire : $BC^2 = 64 + 36$

C'est-à-dire : $BC^2 = 100$

C'est-à-dire : $BC^2 = 10^2$ (car $BC > 0$)

Donc : $BC = 10 \text{ cm}$



*** Remarque :** ABC est un triangle rectangle en A :

Donc $AB^2 = BC^2 - AC^2$ et $AC^2 = BC^2 - AB^2$

III- Cosinus d'un angle aigu :

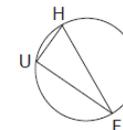
*** Définition :** Le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Exercice 5 : EFG est un triangle rectangle en E et le point O est le milieu de $[FG]$.

* Montre que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EFG en déterminant son rayon ?

Exercice 6 : $[HF]$ est un diamètre du cercle (C) .

U appartient à ce cercle tel que : $\widehat{UHF} = 72^\circ$.



1) Quelle est la nature du triangle UHF ? Justifie.

2) Dédus-en la mesure de l'angle \widehat{UFH} .

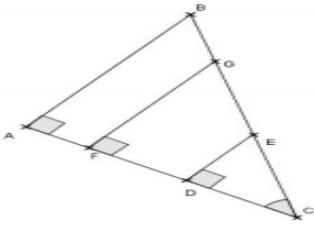
Exercice 7 : ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$. Calcule BC .

Exercice 8 : EFG est un triangle rectangle en E tel que : $EF = 6 \text{ cm}$ et $FG = 10 \text{ cm}$. Calcule EG .

Exercice 9 : (C) est un cercle de diamètre $EF = 29 \text{ cm}$ et M un point du cercle tel que $EM = 21 \text{ cm}$. Calcule FM .

Activités

Activité 4 :



1) Mesurer au rapporteur l'angle \widehat{ACB} . Puis, mesurer les longueurs suivantes : CD et CE, FC et GC, AC et BC.

Compléter les pointillés suivants :

$\widehat{ACB} \approx \dots\dots\dots$

CD = ; CE = ; $\frac{CD}{CE} = \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$

CF = ; CG = ; $\frac{CF}{CG} = \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$

CA = ; CB = ; $\frac{CA}{CB} = \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$

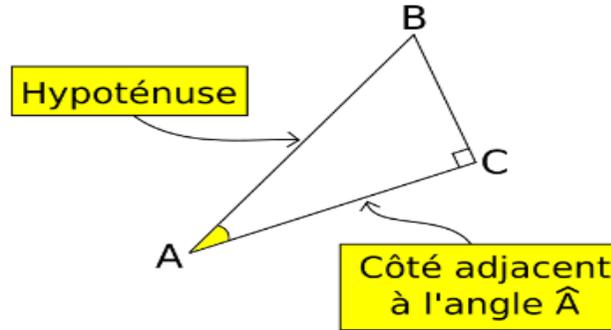
2) Que constate-t-on concernant les trois rapports précédents ?

→ Ce nombre s'appelle le *cosinus* de l'angle \widehat{ACB} , s'écrit : $\cos \widehat{ACB}$.

Ce nombre est indépendant du triangle rectangle choisi (CDE, ou bien CFG, ou bien CAB)

Contenu de la leçon

* **Exemple :** ABC est un triangle rectangle en C tel que : AC = 3cm et AB = 5cm.



$$\cos \hat{A} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{L'hypoténuse}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

* **Remarque :** Puisque l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle alors le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1.

Evaluation

Exercice 10 : ABC un triangle rectangle en A tel que : AC = 8cm et AB = 6cm. H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

- 1) Construis la figure.
- 2) Calcule BC.
- 3) Exprime l'aire du triangle ABC avec deux méthodes.
- 4) Déduis-en la valeur de AH.
- 5) Calcule BH et CH.

Exercice 11 : ABC est un triangle rectangle en A. Complète le tableau suivant :

	AB	BC	$\cos \widehat{ABC}$
1 ^{ère} cas	5	8
2 ^{ème} cas	3	0,7
3 ^{ème} cas	7	0,78

Exercice 12 : ABC un triangle rectangle en A tel que : AC = 8cm et AB = 6cm. I le milieu de [AB] et H est le projeté orthogonal du point I sur la droite (BC).

- 1) Calcule $\cos \widehat{ABC}$.
- 2) Exprime $\cos \widehat{B}$ en fonction de BH.
- 3) Déduis-en la valeur de BH.
- 4) Calcule IH et CH.