Chapitre ④ : Théorème de Pythagore et cosinus d'un angle droit

I – Théorème de Pythagore :

1) La propriété directe :

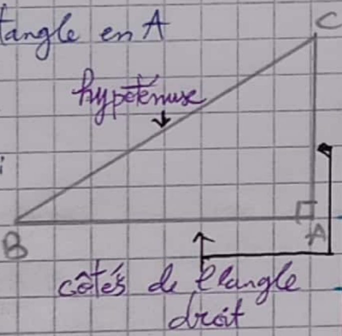
a) propo :

Si un triangle est rectangle, alors le carré longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A alors $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

b) figure géométrique :

ABC est un triangle rectangle en A alors d'après le théorème de Pythagore directe on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$



* **Remarque importante :**

Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypothénuse est toujours supérieure aux longueurs des côtés de l'angle droit

* ABC est un triangle rectangle en A, donc :

$\boxed{AB < BC \quad et \quad AC < BC}$

c) Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A telque AB = 3 cm et AC = 4 cm, calculer BC

* On a ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore

on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

$BC^2 = 25$

donc $BC = \sqrt{25}$

Alors : $BC = 5 cm$

d) Remarques :

* Le théorème de Pythagore nous permet de calculer un côté d'un triangle rectangle si on sait les deux autres côtés.

* Dans la dernière étape du calcul, nous avons besoin de la racine carré pour supprimer le carré, cette racine est supprimée elle même si le nombre est un carré parfait, sinon elle reste, mais on peut utiliser la calculatrice pour trouver la valeur approchée

* On appelle carré parfait le carré d'un nombre entier positif, voici la liste des dix premiers carrés parfaits

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

2) Exercice d'application :

EFG est un triangle rectangle en E telque EF = 8 et FG = 10. Calculer EG

Solution : On a EFG est un triangle rectangle en E, alors d'après le théorème de Pythagore

On a : $FG^2 = EF^2 + EG^2$

$10^2 = 8^2 + EG^2$

$EG^2 = 10^2 - 8^2$

$EG^2 = 100 - 64$

$EG^2 = 36$

$EG = \sqrt{36}$

Alors on a : $EG = 6$

* **Remarque : Conséquence de la propo**

Si le carré du plus grand côté n'est pas égale à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

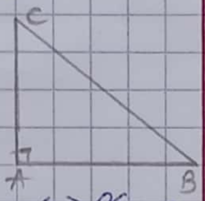
II – Cosinus d'un angle aigu :

1) Définition :

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de son côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse.

* Vocabulaire :

ABC est un triangle rectangle en A



- $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les deux angles ~~aig~~ aigus
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ et il est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$
- [AC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ et il est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$
- [BC] est l'hypoténuse.

$$\boxed{\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}}$$

_ Le cosinus est le premier rapport trigonométrique

* Autrement dit,

ABC est un triangle rectangle en A

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

2) Remarques importantes :

1) x est mesure d'un angle aigu donc $0 < \cos x < 1$
Le cosinus de n'importe quel angle aigu est toujours compris entre 0 et 1

2) Le rapport trigonométrique cos n'a pas d'unité.

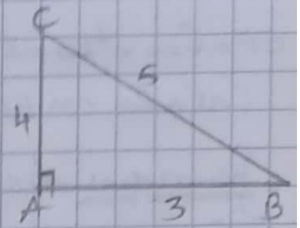
3) Pour calculer cos 37° par exemple, on utilise la touche cos dans la calculatrice

4) On peut écrire $\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{B}$ si on n'a pas ambiguïté

5) ABC triangle rectangle en A, donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires c.à.d $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$

3) Exemples :

*** Exemple ① :** ABC est un triangle rectangle en A telque



Calculer $\cos \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ACB}$

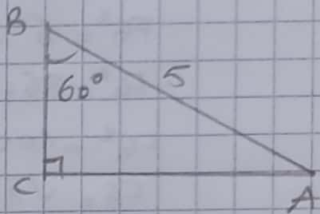
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6 < 1$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$$

*** Exemple ②**

ABC est un triangle rectangle en C telque

$AB = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 60°$



Calculer BC et AC

* ABC est un triangle rectangle en C, donc :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BC}{AB} \quad \text{donc} \quad \cos 60° = \frac{BC}{5}$$

Alors $\frac{1}{2} = \frac{BC}{5} \rightarrow BC = \frac{5}{2}$

$$\boxed{BC = 2,5 \text{ cm}}$$

* De plus on a $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$

donc $60° + \widehat{ACB} = 90°$

$\widehat{ACB} = 90° - 60°$

donc $\widehat{ACB} = 30°$

On a $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{\cancel{AB}}$

$\cos 30° = \frac{AC}{5}$

$AC = 5 \times \cos 30°$ avec $\cos 30° \approx 0,86$

$AC \approx 5 \times 0,86$

$\boxed{AC \approx 4,3 \text{ cm}}$ valeur approché

4) Exercice d'application :

EFG est un triangle rectangle en E telque $EF = 6\,cm$ et $EG = 8\,cm$.

Calculer $\cos \widehat{EFG}$ et $\cos \widehat{EGF}$

* **Remarque:** pour calculer les cos de $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$, on aura besoin de l'hypoténuse FG c'est pourquoi on utilise le théorème de Pythagore pour calculer FG.

Solution: Le triangle EFG est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore

On a : $FG^2 = EF^2 + EG^2$

$FG^2 = 6^2 + 8^2$

$FG^2 = 36 + 64$

$FG^2 = 100$

$FG = \sqrt{100}$

Alors $FG = 10\,cm$

On a : $\cos \widehat{EFG} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

$\cos \widehat{EGF} = \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} = 0,8.$