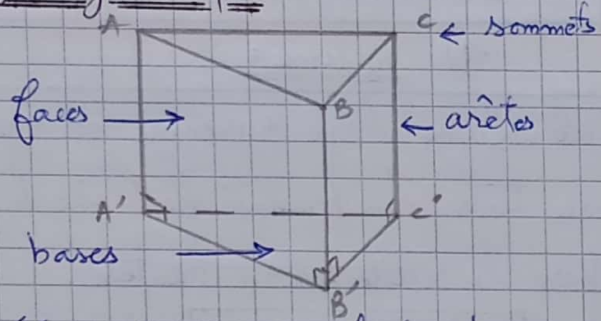
Chapitre ⑩ : Géométrie dans l'espace

I – Prisme droit

1) Définition

Un prisme droit est solide constitué de deux faces identiques parallèles entre elles de forme polygonale (triangle, rectangle, carré, pentagone...) qui constituent les bases du prisme, Il est également constitué de faces latérales rectangulaires toutes perpendiculaires aux bases.

* figure géométrique



ABCA'B'C' est un prisme droit à base triangulaire

→ AA' = BB' = CC'

AA' est la hauteur du prisme

* Exemples:

→ Le parallélépipèdes est un prisme droit à bases rectangulaire.

→ Le cube est un prisme droit à bases carrés.

2) Aire latérale:

L'aire latérale d'un prisme droit est égale au produit du perimètre d'une de ses bases et la hauteur.

$$\boxed{\mathcal{A} = p \times h}$$

perimètre d'une base ↑ ↑ hauteur

3) Volume :

Le volume d'un prisme droit est égale au produit de l'aire d'une base et sa hauteur.

$$\boxed{V = S \times h}$$

Aire de la base ↑ ↑ hauteur

* Exemple:

On considère un prisme droit dont le périmètre de la base est 28 cm et l'aire de la base est 13 cm² et de hauteur 5 cm

→ l'Aire latérale :

$\mathcal{A} = p \times h = 28 \times 5 = 140\ cm^2$

→ Le volume : $V = S \times h = 13 \times 5 = 65\ cm^3$

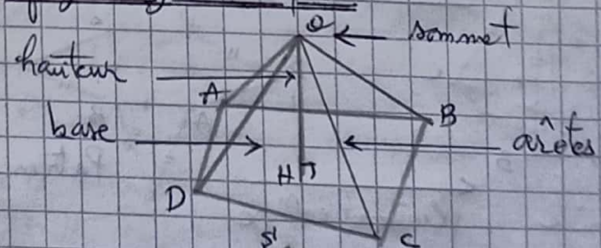
II – Le pyramide :

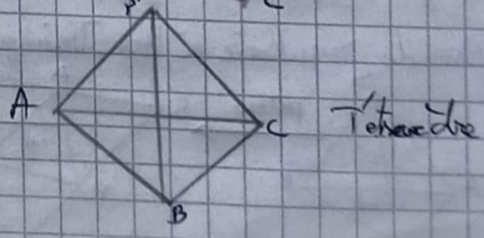
1) Définition

Une pyramide est un solide ayant :

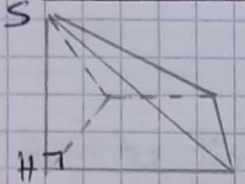
- Une face polygonale appelée base
- Toutes les autres faces sont des triangles qui ont un sommet commun et sont appelées faces latérales.
- Si la base est aussi triangulaire, alors cette pyramide est appelée tétraèdre.

* figure géométrique.

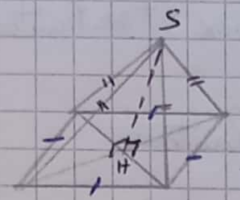




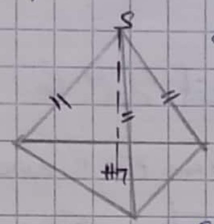
* Cas particuliers :



Pyramide dont la hauteur est une arête : H est un sommet de la base



Pyramide régulière à base carrée : H est le centre de la base



Tétraèdre dont la base est un triangle équilatéral : H est le centre du cercle circonscrit de ce triangle.

→ Une pyramide régulière est une pyramide dont toutes les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

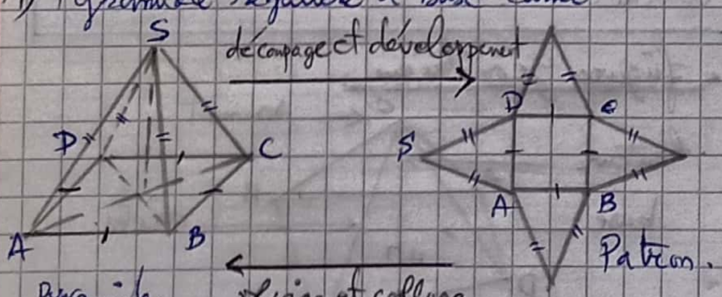
2) Patron :

→ Le patron d'une pyramide se compose du polygone de base et des faces latérales qui sont des triangles.

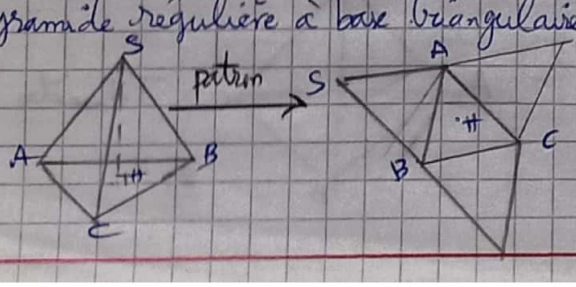
→ On déplie la pyramide et on obtient son patron

→ Exemples :

1) Pyramide régulière à base carrée



2) Pyramide régulière à base triangulaire



* Remarques :

→ Une pyramide a plusieurs patrons possibles

→ Méthode : Quelque la pyramide, le patron se construit de la manière suivante :

- On trace d'abord la base en grandeur réelle.
- Construire chaque face latérale (= triangles) au compas.

3) Aire latérale

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de tous les faces latérales

4) Volume :

Le volume d'une pyramide est égale au tiers du produit de l'aire de la base du solide par la hauteur.

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h}$$

aire de la base — hauteur

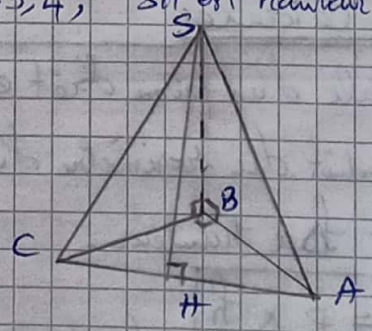
* Exemple.

SABC est une pyramide dont la base est ABC triangle rectangle en B

SAB et SBC sont rectangle en B

$AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$, $SB = 6$

$SH = 3{,}4$, SH est hauteur du triangle SAC



- L'aire latérale du pyramide est

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABS} + \mathcal{A}_{SBC} + \mathcal{A}_{ASC}$$
$$= \frac{AB \times SB}{2} + \frac{BC \times BS}{2} + \frac{SA \times AC}{2}$$
$$= \frac{(4\times 6) + (3\times 6) + (3,4 \times 5)}{2}$$

Alors $\boxed{\mathcal{A} = 29,5 \text{ cm}^2}$

- Le volume du pyramide est:

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times SH$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{BA \times BC}{2} \times SH$$
$$= \frac{4 \times 3 \times 3,4}{6}$$

Alors $\boxed{V = 6,8 \text{ cm}^3}$

III _ Cône de révolution :

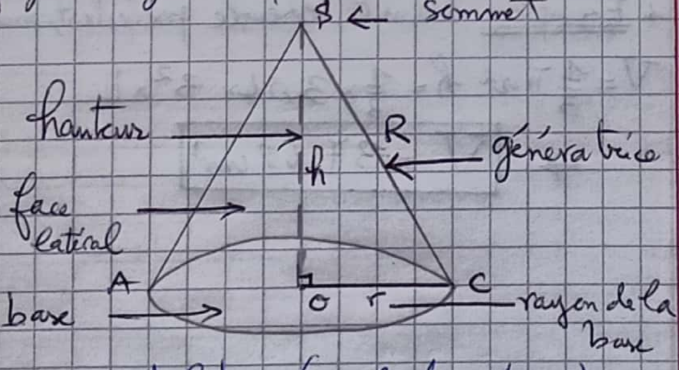
1) Définition :

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit.

Il est constitué :

- D'un disque appelé base du cône.
- D'une surface courbe appelée face latérale entourant le disque de la base.

* figure géométrique

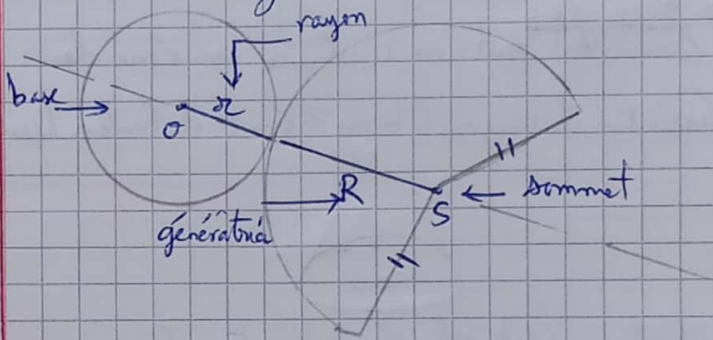


* r : rayon de la base (cercle de centre O)
* R : génératrice du cône (rayon du cercle de centre S
* h(OS) : hauteur (passe par le sommet et le centre du cercle de la base)

⟹ On peut appliquer Théorème de Pythagore au triangle OSC qui est rectangle en O

2) Patron :

Le patron d'un cône de révolution est constitué de disque de base et de la surface latérale qui est représentée par un secteur angulaire.



Le patron d'une cône de révolution n'est pas si simple à réaliser

Méthode :

Quelque le cône de révolution, le patron se construit de la manière suivante :

- Il faut connaître au minimum le rayon du disque de base et la longueur d'une génératrice.
- Construire la face latérale courbe en calculons la mesure de l'angle au sommet S (proportionnalité, voir exemple)
- Placer un point H tel que HS soit égale à la somme de la longueur d'une génératrice et du rayon du disque de la base.
- Construire la base

***Règle:**

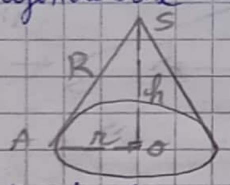
- $2\pi R$: Périmètre du cercle complet de la face latérale
- $2\pi r$: Périmètre du disque de la base

$2\pi R$	$2\pi r$
$360°$	α

$$\alpha = \frac{360° \times 2\pi r}{2\pi R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{r}{R} \times 360°}$$

$$\boxed{\text{angle du secteur angulaire} = \frac{\text{petit rayon}}{\text{grand rayon}} \times 360°}$$

⇒ **Exemple:**
Comment peut-on construire un cône de révolution de rayon de base 3 cm et de hauteur 4 cm



Calculons d'abord la génératrice R

On a AOS est un triangle rectangle en O

donc d'après Théorème de Pythagore directe, on a

$AS^2 = AO^2 + OS^2$
$= 3^2 + 4^2$
$= 9 + 16$
$AS^2 = 25$
$AS = \sqrt{25}$

Alors $R = AS = 5\,cm$

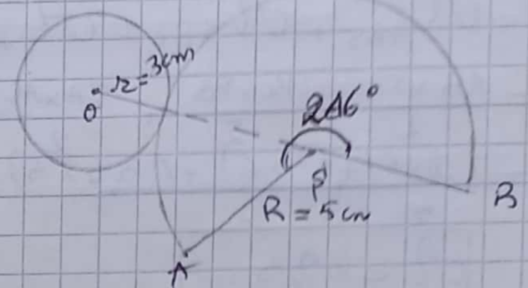
donc l'angle au sommet S est :

$$\alpha = \frac{r}{R} \times 360° = \frac{3}{5} \times 360°$$

$$\boxed{\alpha = 216°}$$

→ On trace alors un arc de cercle de centre S, de rayon $R = 5\,cm$ et d'angle $216°$

→ On place un point O à $R + r = 5 + 3 = 8\,cm$ du point S, on complète le patron en traçant le cercle de centre O et de rayon $r = 3\,cm$



3) Aire latérale

πR^2	A
$360°$	α

avec $\alpha = \frac{r}{R} \times 360°$

$\pi \approx 3{,}14$

$$A = \frac{\alpha \times \pi R^2}{360°} = \frac{\frac{r}{R} \times 360° \times \pi R^2}{360°}$$
$$= \pi r R$$

Alors $\boxed{A = \pi r R}$ est l'aire du cône de centre de base r et de génératrice R

***Exemple:** D'ans l'exemple précédent

On a $A = \pi \times r \times R = 3{,}14 \times 3 \times 5$

Alors : $\boxed{A = 47{,}1\,cm^2}$

4) Volume :

Le volume d'un cône de révolution est égale au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur du solide

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h}$$

rayon de la base ; hauteur

***Exemple:** Dans l'exemple précédent, on a :

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 3^2 \times 4$

→ $\boxed{V = 37{,}68\,cm^3}$