

ORDRE ET OPÉRATIONS

4

Objectifs d'apprentissage

- ✍ Comparer deux nombres relatifs.
- ✍ Maîtriser les propriétés de l'ordre et des opérations.
- ✍ Ecrire un encadrement d'un nombre relatif.
- ✍ Utiliser les propriétés de l'ordre dans la résolution des problèmes.

Gestion du temps

🕒 12 heures

Prérequis

- ⊗ Comparer deux nombres rationnels.
- ⊗ Utiliser les propriétés de l'ordre et l'addition.
- ⊗ Utiliser les propriétés de l'ordre et la multiplication par un nombre positif.

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

◆ Niveau : 3^{ème} APIC

◆ Matière : Mathématiques

◆ Etablissement : Collège Nahda

Activités

Activité 1 : Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Comparaison de a et b	a-b	Signe de a-b
4	5			
3	-2			
-5	-8			
-7,5	-2,3			

2) A l'aide du tableau, compléter par : $<$ ou $>$

* Si : $a - b < 0$ alors $a \dots b$

* Si : $a - b > 0$ alors $a \dots b$

Activité 2 : a, b et c sont des nombres réels tel que $a > b$.

1) calculer la différence de $a + c$ et $b + c$.

2) Déduis-en la comparaison de $a + c$ et $b + c$.

3) compare $a - c$ et $b - c$ en procédant de la même façon.

4) Enonce les règles que tu viens de démontrer.

Contenu de la leçon

I- Comparaison de deux nombres réels :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels :

- ◆ Si $a - b < 0$ alors $a < b$
- ◆ Si $a - b > 0$ alors $a > b$
- ◆ Si $a - b = 0$ alors $a = b$

*** Exemple :** * On compare : $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{7}$

$$\text{On a : } \frac{3}{5} - \frac{6}{7} = \frac{21}{35} - \frac{30}{35} = \frac{-9}{35}$$

$$\text{Puisque : } \frac{-9}{35} < 0$$

$$\text{Alors : } \frac{3}{5} < \frac{6}{7}$$

II- Ordre et opérations :

1) Ordre et addition – ordre et soustraction :

*** Propriété :** Soient a, b et c trois nombres réels :

- ☞ Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
- ☞ Si $a < b$ alors $a - c < b - c$

*** Exemple :** * On compare : $3 + \sqrt{7}$ et $8 + \sqrt{7}$

$$\text{On a : } 3 < 8 \text{ alors } 3 + \sqrt{7} < 8 + \sqrt{7}$$

** Si $x > 3$, comparer : $x - 5$ et -2

$$\text{On a } x > 3 \text{ alors } x - 5 > 3 - 5, \text{ donc } x - 5 > -2$$

*** Propriété :** Soient a, b, c et d des nombres réels :

$$\text{☞ Si } \begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \text{ alors } a + c < b + d$$

*** Exemple :** * a et b deux nombres réels tel que $a < 4$ et $3 > b$.

Evaluation

Exercice 1 : Comparer les nombres suivants :

1) $a = \frac{4}{7}$ et $b = \frac{-5}{6}$

2) $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{4}{5}$

3) $a = \frac{-2}{5}$ et $b = \frac{-3}{4}$

4) $a = \sqrt{3} - 4$ et $b = \sqrt{3} - 5$

5) $a = -3\sqrt{2} - 1$ et $b = \sqrt{2} + 7$

Exercice 2 : Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \geq -8$ et $b \geq 5$

Montrer que :

1) $a + 4 \geq -4$

2) $b - \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2}$

3) $a + b \geq -3$

Exercice 3 : Compléter :

$x > 6$	$x > 6$	$x > 6$
$x + 1 > \dots$	$x + 7 > \dots$	$x - 4 > \dots$
$x \geq -4$	$x \geq -4$	$x \geq -4$
$x + 1 \dots$	$x + 7 \dots$	$x - 4 \dots$
$x > 5$	$x > 8$	$x > -12$
$2x > \dots$	$\frac{1}{2}x > \dots$	$\frac{3}{4}x > \dots$

Activité 3 : activité : 6 – page : 43

Activité 4 : 1) Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	a < b ou a > b	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
2	8				
-5	-10				

2) Énoncer la propriété que tu viens de démontrer.

Montrer que : $a + b < 7$.

On a : $\begin{cases} a < 4 \\ b < 3 \end{cases}$ alors $a + b < 4 + 3$ donc $a + b < 7$.

2) Ordre et multiplication :

* **Propriété :** Soient a, b et c des nombres réels :

☞ Si $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases}$ alors $a \times c < b \times c$

☞ Si $\begin{cases} a < b \\ c < 0 \end{cases}$ alors $a \times c > b \times c$

* **Exemple :** * Soit x un nombre réel tel que $x < 3$. Comparons $-4x$ et -12 .

On a : $\begin{cases} x < 3 \\ -4 < 0 \end{cases}$ alors $-4 \times x > -4 \times 3$ donc $-4x > -12$.

* **Remarque :** Soient a et b deux nombres réels :

☞ Si $a < b$ alors $-a > -b$

* **Propriété :** Soient a, b, c et d des nombres réels **positifs** :

☞ Si $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$ alors $a \times c < b \times d$

* **Exemple :** * Soit x et y deux nombres réels positifs tel que $x < \sqrt{3}$ et $y < 2\sqrt{6}$. Montrer que : $xy < 6\sqrt{2}$.

On a : $\begin{cases} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{cases}$ alors $x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$ donc $xy < 2\sqrt{18}$

Puisque : $2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Alors : $xy < 6\sqrt{2}$.

3) Ordre et inverse :

Exercice 4 : Compléter :

$x < 12$ $x + 4 < \dots$	$x < 5$ $x - 1 < \dots$	$x < 13$ $x - 14 < \dots$
$x \geq 2$ $3x \dots\dots$	$x \geq 5$ $-2x \dots\dots$	$x \geq -4$ $5x \dots\dots$
$x > 3$ $-x \dots\dots$	$x > -4$ $7x \dots\dots$	$x > 18$ $0,5x \dots\dots$

Exercice 5 : Comparer les nombres suivants :

1) $a = \sqrt{8}$ et $b = 3$

2) $a = 3\sqrt{5}$ et $b = \sqrt{37}$

3) $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 5$

4) $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{2}$

5) $a = \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

6) $a = 6 + \sqrt{3}$ et $b = 6 + \sqrt{5}$

7) $a = 20\sqrt{2}$ et $b = -7\sqrt{14}$

8) $a = -\sqrt{3}$ et $b = -2\sqrt{10}$

9) $a = -10\sqrt{2}$ et $b = -9\sqrt{3}$

10) $a = 2 + 2\sqrt{2}$ et $b = 2 + \sqrt{10}$

11) $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{11}$ et $b = \sqrt{11} + \sqrt{10}$

12) $a = 1 + \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

13) $a = \sqrt{17} - \sqrt{11}$ et $b = \sqrt{5} - \sqrt{40}$

14) $a = 3 + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{27} + 1$

Activité 5 : A a et b deux nombres réels positifs

1) démontrer que le signe de $a^2 - b^2$ est le même signe de $a - b$

2) démontrer que si $a \leq b$ donc $a^2 \leq b^2$

B a et b sont deux réels négatifs

1) démontrer que le signe de $a^2 - b^2$ est le signe contraire de $a - b$

2) démontrer que si $a \leq b$ donc $a^2 \geq b^2$

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels :

Si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

*** Exemple :** * On a : $2 < 8$ alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

* On a : $-10 < -5$ alors $\frac{1}{-10} > \frac{1}{-5}$

4) Ordre et carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels **positifs** :

Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$.

Si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels **négatifs** :

Si $a < b$ alors $a^2 > b^2$.

Si $a^2 > b^2$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{41}$

$$\text{On a : } \begin{cases} (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45 \\ (\sqrt{41})^2 = 41 \end{cases} \text{ donc : } (3\sqrt{5})^2 > (\sqrt{41})^2$$

Puisque $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{41}$ deux nombres positifs, alors : $3\sqrt{5} > \sqrt{41}$.

5) Ordre et racine carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels **positifs** :

Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $\sqrt{15}$ et $\sqrt{19}$

Puisque : $15 < 19$ alors $\sqrt{15} < \sqrt{19}$

Exercice 6 : 1) Comparer les nombres $7\sqrt{2}$ et $5\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\frac{1}{7\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

2) Comparer les nombres $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\sqrt{4\sqrt{3} + 7}$ et $\sqrt{5\sqrt{2} + 7}$.

Exercice 7 : 1) Comparer les nombres : $\frac{13}{5}$ et $\frac{12}{7}$

2) Déduire la comparaison de : $\frac{13}{5} \times (-3)^{11}$ et $\frac{12}{7} \times (-3)^{11}$.

3) Comparer les nombres : $3\sqrt{3}$ et $\sqrt{11} + 4$

4) Déduire la comparaison de : $\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt{10}$ et $\frac{1}{\sqrt{11}+4} - \sqrt{10}$

Activité 6 : Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que :

$$x \leq a \leq y \quad \text{et} \quad z \leq b \leq t$$

1) Montrer que : $a + b \leq y + t$

Et $x + z \leq a + b$

2) En déduire un encadrement de :

$$a + b$$

3) Démontrer que $-t \leq -b$

$$\text{et} \quad -b \leq -z$$

4) déduire un encadrement de $-b$

5) déduire l'encadrement de $a - b$

(remarquer que $a - b = a + (-b)$)

III- Encadrement :

1) Encadrement et addition :

*** Propriété :** Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } a + c \leq x + y \leq b + d.$$

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 8$ et

$$-4 \leq y \leq 2. \text{ Encadrer : } x + y.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -4 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ donc : } 3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2,$$

$$\text{alors : } -1 \leq x + y \leq 10$$

2) Encadrement et opposé :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels :

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ alors } -b \leq -x \leq -a.$$

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7$ et

$$-1 \leq y \leq 5. \text{ Encadrer : } -x \text{ et } -y.$$

$$\Rightarrow \text{On a : } 2 \leq x \leq 7 \text{ alors : } -7 \leq -x \leq -2.$$

$$\Rightarrow \text{On a : } -1 \leq y \leq 5 \text{ alors : } -5 \leq -y \leq 1.$$

3) Encadrement et soustraction :

*** Propriété :** Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } a - d \leq x - y \leq b - c.$$

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7$ et

$$-1 \leq y \leq 5. \text{ Encadrer : } x - y.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -5 \leq -y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{alors : } 2 + (-5) \leq x + (-y) \leq 7 + 1, \text{ d'où : } -3 \leq x - y \leq 8$$

Exercice 8 : x et y deux nombres réels tel

$$\text{que : } 2 \leq x \leq 5 \text{ et } 1 \leq y \leq 4$$

Encadrer :

$$x + 5 ; 3x ; -5y ; y - 3 ; xy ;$$

$$\frac{1}{x} ; \frac{1}{y} ; x + y ; x - y ; \frac{1}{x+y} ;$$

$$\frac{x - y}{x + y} ; 2x + y ; -4x + 3y ; 3x - 2y$$

Activités

Activité 7: A Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que :

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$x \leq a \leq y \text{ et } z \leq b \leq t$$

1) Montrer que : $a \times b \leq y \times t$

$$\text{Et } x \times z \leq a \times b$$

2) En déduire l'encadrement de : $a \times b$

3) On considère que $b < 0$, montrer que

$$a \times b \leq y \times z \text{ et } x \times t \leq a \times b$$

B On considère que $a \neq 0$ et

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

4) Montrer que $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a}$

5) Déduire l'encadrement de $\frac{1}{a}$

On considère que $b \neq 0$ et

$$t \neq 0 \text{ et } z \neq 0$$

6) Donner l'encadrement de $\frac{1}{b}$

7) Déduire l'encadrement de $\frac{a}{b}$

Contenu de la leçon

4) Encadrement et multiplication :

*** Propriété :** Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels **positifs** :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } ac \leq xy \leq bd.$$

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $1 \leq x \leq 7$ et $4 \leq y \leq 6$. Encadrer : xy .

$$\text{On a : } \begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ 4 \leq y \leq 6 \end{cases} \text{ donc : } 1 \times 4 \leq x \times y \leq 7 \times 6, \text{ alors : } 4 \leq xy \leq 42$$

5) Encadrement et inverse :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels **positifs** :

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}.$$

*** Exemple :** * x un nombre réel tel que : $5 \leq x \leq 9$. Encadrer : $\frac{1}{x}$.

$$\text{On a : } 5 \leq x \leq 9 \text{ alors : } \frac{1}{9} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$$

6) Encadrement et carré, encadrement et racine carrée :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels **positifs** :

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ alors } a^2 \leq x^2 \leq b^2 \text{ et } \sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}.$$

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $16 \leq x \leq 25$ et $-3 \leq y \leq -2$. Encadrer : \sqrt{x} et y^2 .

$$\Rightarrow \text{On a : } 16 \leq x \leq 25, \text{ donc : } \sqrt{16} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{25}, \text{ alors : } 4 \leq \sqrt{x} \leq 5$$

$$\Rightarrow \text{On a : } -3 \leq y \leq -2, \text{ donc : } 2 \leq -y \leq 3, \text{ donc : } 2^2 \leq (-y)^2 \leq 3^2$$

$$\text{Alors : } 4 \leq y^2 \leq 9$$

Evaluation

Exercice 9 : Soit a et b deux nombres réels

tels que :

$$1 \leq \frac{a-4}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ et } -5 \leq b \leq -4$$

1) Montrer que : $6 \leq a \leq 7$

2) Encadrer les nombres : $a + b$;

$$a \times b ; 3a - 2b$$

3) Montrer que : $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \sqrt{7}$