Chapitre ⑤ : Ordre et opérations

I _ Comparaison de deux nombres rationnels

1) Règle :

Pour comparer deux nombres rationnels a et b, on détermine le signe de leur différence $a-b$

* $a-b \geq 0$ signifie que $a \geq b$
* $a-b \leq 0$ signifie que $a \leq b$

2) Exemples :

1) Comparer 7 et $\frac{2}{5}$

On a : $\frac{2}{5} - 7 = \frac{2-35}{5} = \frac{-33}{5} \leq 0$

donc $\frac{2}{5} - 7 \leq 0$ Alors $\frac{2}{5} \leq 7$

2) Comparer $\frac{11}{3}$ et $\frac{7}{8}$

On a $\frac{11}{3} - \frac{7}{8} = \frac{88-21}{24} = \frac{67}{24} > 0$

donc $\frac{11}{3} - \frac{7}{8} > 0$ Alors $\frac{11}{3} > \frac{7}{8}$

3) a et b deux nombres rationnels telque $a-b=-5$. Comparer a et b

On a $a-b=-5<0$

donc $a-b<0$ Alors $a<b$

3) Vocabulaire :

a - symbole $<$

Le symbole $a<b$ signifie que $\begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ a \neq b \end{cases}$

se lit a est inférieure strictement à b

b - Symbole $\leq$

Le symbole $a \leq b$ signifie que $\begin{cases} a < b \\ \text{ou} \\ a = b \end{cases}$

se lit a est inférieur ou égale à b

c - Inégalité :

a, b deux nombres rationnels

Tout égalité sous la forme $a \leq b$ ou $a \geq b$ s'appelle inégalité

a et b s'appelle côtés de l'inégalité

II _ Ordre et opérations :

1) Ordre et addition :

a) Propo ① :

a, b et k des nombres rationnels

Si $a \leq b$ alors $a+k \leq b+k$

* **Exemple :**

a et b deux nombres rationnels telque $a-5 \leq b$

Montrons que $a-3 \leq b+2$

On a $a-5 \leq b$ donc $a-5+2 \leq b+2$

Alors : $a-3 \leq b+2$

b) Propo ② :

a, b, c et d des nombres rationnels

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors $a+c \leq b+d$

* **Exemple :**

a et b deux nombres rationnels telque :

$a+3 \leq -4$ et $2b-1 \leq \frac{1}{2}$

Montrons que $2b+a+2 \leq -\frac{7}{2}$

On a $\begin{cases} a+3 \leq -4 \\ 2b-1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $a+3+2b-1 \leq -4+\frac{1}{2}$

$2b+a+2 \leq \frac{-8+1}{2}$

Alors $2b+a+2 \leq \frac{-7}{2}$

2) Ordre et multiplication :

a - Propo ③ :

a, b et k nombres rationnels

1) si $\begin{cases} a \leq b \\ k \geq 0 \end{cases}$ donc $a \times k \leq b \times k$

2) si $\begin{cases} a \leq b \\ k \leq 0 \end{cases}$ donc $a \times k \geq b \times k$

b - Exemple :

a et b deux nombres rationnels telque $a \leq \frac{1}{2}$ et $b \leq -\frac{3}{2}$

déduire $2a$ et $-6b$

* On a $\begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ 2 > 0 \end{cases}$ donc $2 \times a \leq 2 \times \frac{1}{2}$

donc $\boxed{2a \leq 1}$

* On a $\begin{cases} b \leq -\frac{3}{2} \\ -6 < 0 \end{cases}$ donc $-6 \times b \geq -6 \times \frac{-3}{2}$

donc $\boxed{-6b \geq 9}$

III - Encadrement :

1) Définition :

a, b et x des nombres rationnels

Chacune des écritures $a < x < b$ et $a \leq x \leq b$ s'appelle un encadrement du nombre x

* Remarque :
* L'écriture $a \leq x \leq b$ se lit x est compris en a et b
* L'écriture $a < x < b$ se lit x est strictement compris entre a et b

2) Encadrement et approximation :

* Exemple : Considérons le nombre $\frac{13}{7}$

On a

$$\begin{array}{r|l} 13 & 7 \\ \hline 60 & 1,85 \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

1) La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par défaut est 1,85

* La valeur approché du nombre $\frac{13}{7}$ à 0,01 par excès est 1,86

donc l'écriture $1,85 \leq \frac{13}{7} < 1,86$ est un encadrement du nombre $\frac{13}{7}$

2) La valeur approché du nombre $-\frac{13}{7}$ à 0,01 par défaut est $-1,86$

* La valeur approché du nombre $-\frac{13}{7}$ à 0,01 par excès est $-1,85$
* L'écriture $-1,86 \leq -\frac{13}{7} \leq -1,85$ s'est un encadrement du nombre $-\frac{13}{7}$

3) Encadrement et opérations

a - Encadrement d'une somme

* Propo ④ :

Soient tous les nombres rationnels

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ donc $a + c \leq x + y \leq b + d$

* Exemple :

x et y deux nombres rationnels telque : $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$

Encadrer $x + y$

On a $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq -1 \end{cases}$ donc $2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1)$

Alors : $-1 \leq x + y \leq 4$

b) Encadrement d'une différence :

* Propo ⑤ :

Soient tous les nombres rationnels.

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ donc $a - d \leq x - y \leq b - c$

* Remarque importante :

On a : $a - b = a + (-b)$

donc pour encadrer $a - b$, on encadre d'abord $(-b)$ après on applique la propo ④ (Somme)

Opposé : Si $a \leq x \leq b$ alors $-b \leq -x \leq -a$

* Exemple : x et y deux nombres rationnels telque : $3 \leq x \leq 8$ et $-4 \leq y \leq 2$

Encadrer $x-y$

On a : $-4 \leq y \leq 2$ donc $-2 \leq -y \leq 4$

On a $\begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 4 \end{cases}$ donc $3+(-2) \leq x+(-y) \leq 8+4$

donc $1 \leq x-y \leq 12$

c) Encadrement d'un produit

* Propo ⑥ :

Soient tous les nombres rationnels telque $a \leq x \leq b$

* Si $K > 0$ alors : $Ka \leq Kx \leq Kb$
* Si $K < 0$ alors $Kb \leq Kx \leq Ka$

* Exemple :

x est un nombre rationnel telque : $-3 \leq x \leq 4$

Encadrer $2x$ et $-5x$

* On a $-3 \leq x \leq 4$ et $2 > 0$

donc $2 \times (-3) \leq 2 \times x \leq 2 \times 4$

Alors $-6 \leq 2x \leq 8$

* On a $-3 \leq x \leq 4$ et $-5 < 0$

donc $-5 \times 4 \leq -5 \times x \leq -5 \times (-3)$

Alors $-20 \leq -5x \leq 15$

4) Exercice d'application :

a et b deux nombres rationnels telque : $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ et $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

Encadrer $a+b$ et $a-b$ et $-4a$ et $8b$

$3a+2$ et $-2b-\frac{3}{4}$

* Encadrement $a+b$:

On a $\begin{cases} 1 \leq a \leq \frac{5}{2} \\ -4 \leq b \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

donc $1+(-4) \leq a+b \leq \frac{5}{2}+(-\frac{3}{2})$

Alors $-3 \leq a+b \leq 1$

* Encadrement $a-b$:

On a $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leq -b \leq 4$

et on a : $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

donc $1+\frac{3}{2} \leq a+(-b) \leq \frac{5}{2}+4$

Alors : $\frac{5}{2} \leq a-b \leq \frac{13}{2}$

* Encadrement $-4a$:

On a $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$ donc $-4 \times \frac{5}{2} \leq -4 \times a \leq -4 \times 1$

donc $-10 \leq -4a \leq -4$

* Encadrement $8b$:

On a $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ donc $8 \times (-4) \leq 8 \times b \leq 8 \times (-\frac{3}{2})$

Alors : $-32 \leq 8b \leq -12$

* Encadrement $3a+2$

On a $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$

donc $3 \times 1 \leq 3 \times a \leq 3 \times \frac{5}{2}$

$3 \leq 3a \leq \frac{15}{2}$

$3+2 \leq 3a+2 \leq \frac{15}{2}+2$

Alors : $5 \leq 3a+2 \leq \frac{19}{2}$

* Encadrement $-2b-\frac{3}{4}$

On a : $-4 \leq b \leq -\frac{3}{2}$

donc $-2 \times (-\frac{3}{2}) \leq -2 \times b \leq -2 \times (-4)$

$3 \leq -2b \leq 8$

$3-\frac{3}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq 8-\frac{3}{4}$

$\frac{12-3}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq \frac{32-3}{4}$

Alors : $\frac{9}{4} \leq -2b-\frac{3}{4} \leq \frac{29}{4}$

IV – Inéquations :

1) Définition :

Toute inégalité qui s'écrit sous la forme $ax+b < 0$ ou $ax+b \leq 0$ ou $ax+b > 0$ ou $ax+b \geq 0$ s'appelle une inéquation du premier degré à une inconnue x

2) Résolution des inéquations :

a- Techniques des résolutions :

* La résolution d'une inéquation se base sur les mêmes techniques de résolution des équations :
- On regroupe les inconnus dans un côté et les termes connus dans l'autre côté, à condition de changer le signe du terme déplacé.
- Il faut faire attention au signe du nombre a dans l'inéquation $ax = b$:

$ax \leqslant b$

$a > 0$	$a < 0$
alors $x \leqslant \frac{b}{a}$	alors $x \geqslant \frac{b}{a}$
On change pas le symbole	On change le symbole.

b- les cas de résolution :

1°) Si on a trouvé par exemple $x > a$ (ou $x \leqslant a$), On dit que tous les nombres rationnels supérieur strictement à a (ou inférieur ou égale à a) sont solutions de cet inéquations.

2°) Si on a trouvé une expression impossible par exemple $0 \geqslant 3$ ($0 > 3$), on dit que cet inéquation n'admet pas de solution

3°) Si on a trouvé une expression vraie par exemple $0 > -8$, on dit tout nombre rationnel est une solution de cet inéquation.

c- Exemples :

1°) L'inéquation $2x+1 \leqslant 5$ est respectivement équivalente à

$$2x \leqslant 5-1$$
$$2x \leqslant 4$$
$$x \leqslant \frac{4}{2}$$
$$x \leqslant 2$$

donc tous les nombres rationnels inférieur ou égale à 2 sont solutions de cet équation

2°) L'inéquation $2(3x-5)-3(x+1) \geqslant 0$ est respectivement équivalente à

$$6x - 10 - 3x - 3 \geqslant 0$$
$$3x - 13 \geqslant 0$$
$$3x \geqslant 13$$
$$x \geqslant \frac{13}{3}$$

donc tous les nombres rationnels supérieur ou égale à $\frac{13}{3}$ sont solution de cet inéquation

3°) L'inéquation $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} > \frac{3x+5}{6}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3(x+1)-2(x-3)}{6} > \frac{3x+5}{6}$$
$$3x+3-2x+6 > 3x+5$$
$$x-3x > 5-9$$
$$-2x > -4$$
$$x < \frac{-4}{-2}$$
$$x < 2$$

donc tous les nombres rationnels inférieur strictement à 2 sont solutions de cet inéquation

4°) L'inéquation $2(3x-1)-4x \geqslant 2x+1$ est respectivement équivalente à

$$6x-2-4x \geqslant 2x+1$$
$$2x-2x \geqslant 1+2$$
$$0x \geqslant 3$$

Ce qui est impossible

donc cet inéquation n'admet pas de Solution

5°) L'inéquation $3x+5-2(x+2) > x-7$ est respectivement équivalente à

$$3x+5-2x-4 > x-7$$
$$x-x > -7-1$$
$$0x > -8$$

Donc tout nombre rationnel est une solution de cet inéquation.