Bases sur les fractions

Chapitre 3

Rappel 1

Arrondir un nombre au dixième c'est donner la valeur approchée de ce nombre se terminant au dixième (un chiffre après la virgule) le plus proche de ce nombre.

Exemples :

- ⋆ *Si on veut arrondir* $4{,}73$ *au dixième :* $4{,}73$ *est plus proche de* $4{,}70 = 4{,}7$ *que de* $4{,}80 = 4{,}8$.
  L'arrondi au dixième de $4{,}73$ *s'écrit donc :* $4{,}73 \approx 4{,}3$.
- ⋆ *Si on veut arrondir* $20{,}19$ *au dixième :* $20{,}19$ *est plus proche de* $20{,}20 = 20{,}2$ *que de* $20{,}10 = 20{,}1$.
  L'arrondi au dixième de $20{,}19$ *s'écrit donc :* $20{,}19 \approx 20{,}\underline{2}$.

■ **Exercice 1 (sur ce TD) :** Arrondis les nombres suivants à l'unité :

a) $8{,}62 \approx$ .... b) $32{,}67 \approx$ .... c) $84{,}35 \approx$ .... d) $41{,}316 \approx$ ....

e) $14{,}28 \approx$ .... f) $17{,}15 \approx$ .... g) $26{,}293 \approx$ .... h) $18{,}991 \approx$ ....

■ **Exercice 2 (sur ce TD) :** Arrondis les nombres suivants au dixième :

a) $8{,}62 \approx$ .... b) $32{,}67 \approx$ .... c) $84{,}35 \approx$ .... d) $41{,}316 \approx$ ....

e) $14{,}28 \approx$ .... f) $17{,}15 \approx$ .... g) $26{,}293 \approx$ .... h) $18{,}991 \approx$ ....

Rappel 2

- Diviser un nombre par 10 revient à déplacer la virgule d'un rang *vers la gauche*.
- Diviser un nombre par 100 revient à déplacer la virgule de deux rangs *vers la gauche*.
- Diviser un nombre par 1000 revient à déplacer la virgule de trois rangs *vers la gauche*.

Exemples :

- ⋆ $41{,}65 \div 10 = 4{,}165$; $364 \div 10 = 36{,}4$; $5 \div 10 = 0{,}5$.
- ⋆ $235{,}61 \div 100 = 2{,}3561$; $6\,814 \div 1\,000 = 6{,}814$.

■ **Exercice 3 (dans ton cahier) :** Calcule sans utiliser la calculatrice :

a) $52{,}7 \div 10$ b) $45{,}23 \div 10$ c) $185{,}12 \div 10$ d) $364{,}78 \div 100$

e) $1\,574{,}6 \div 100$ f) $8\,745{,}12 \div 1\,000$ g) $47\,634{,}1 \div 1\,000$ h) $42{,}1 \div 10$

i) $23{,}5 \div 100$ j) $63{,}89 \div 100$ k) $421{,}6 \div 1\,000$ ℓ) $634{,}78 \div 1\,000$

m) $6 \div 10$ n) $59 \div 100$ o) $752 \div 1\,000$ p) $8 \div 100$

q) $20{,}18 \div 10$ r) $20{,}18 \div 100$ s) $20{,}18 \div 1\,000$ t) $20{,}18 \div 10\,000$

u) $204 \div 1\,000$ v) $31{,}47 \div 10$ w) $3{,}1268 \div 100$ x) $9 \div 10$

I — Généralités

Définition

Une écriture fractionnaire est de la forme $\dfrac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$, et correspond à la division du numérateur par le dénominateur.
Si le numérateur et le dénominateur s'écrivent sans virgule, alors on appelle cette écriture une fraction, sinon on l'appelle un quotient.

Exemples :

⋆ $\dfrac{7}{2} = 7 \div 2 = 3{,}5 \longrightarrow \dfrac{7}{2}$ *est une écriture fractionnaire du nombre décimal* 3,5.

⋆ $\dfrac{10}{3} = 10 \div 3 \approx 3{,}33$. *Mais* $\dfrac{10}{3} \neq 3{,}33 \longrightarrow$ *le quotient de 10 par 3* $\left(\text{donc } \dfrac{10}{3}\right)$ *n'admet pas d'écriture décimale.*

■ **Exercice 4 (sur ce TD) :** Donne l'écriture décimale ou une valeur approchée arrondie au dixième des fractions ci-dessous :

$A = \dfrac{10}{4}$	$B = \dfrac{12}{7}$	$C = \dfrac{50}{30}$	$D = \dfrac{6}{5}$	$E = \dfrac{180}{36}$
$A = 10\div$	$B =$..... $\div$.....	$C =$...........	$D =$...........	$E =$...........
$A =$	$B \approx$...........	$C \approx$...........	$D =$...........	$E =$...........

■ **Exercice 5 (sur ce TD) :** Complète en utilisant les symboles "<" ou ">" :

a) $\dfrac{4}{2} \ \ldots \ 1$ b) $\dfrac{18}{3} \ \ldots \ 5$ c) $\dfrac{50}{6} \ \ldots \ 10$ d) $3{,}5 \ \ldots \ \dfrac{30}{9}$

e) $\dfrac{30}{5} \ \ldots \ \dfrac{17}{2}$ f) $\dfrac{70}{4} \ \ldots \ \dfrac{9}{10}$ g) $\dfrac{48}{12} \ \ldots \ \dfrac{25}{9}$ h) $\dfrac{63}{10} \ \ldots \ \dfrac{36}{7}$

Exemples :

⋆ Question : *donner l'écriture fractionnaire de 1,5.*
Réponse :
$1{,}5 = \dfrac{15}{10} \longleftarrow$ *Au numérateur on écrit le nombre en « effaçant » la virgule (ici 1,5 devient 15), au dénominateur on écrit 10, 100 ou 1 000 en fonction du nombre de chiffre derrière la virgule (ici 1 chiffre ⇒ 10).*

⋆ Question : *donner l'écriture fractionnaire de 7,63*
Réponse :
$7{,}63 = \dfrac{763}{100} \longleftarrow$ *Au numérateur on écrit le nombre en « effaçant » la virgule (ici 7,63 devient 763), au dénominateur on écrit 10, 100 ou 1 000 en fonction du nombre de chiffre derrière la virgule (ici 2 chiffres ⇒ 100).*

⋆ Question : *donner l'écriture fractionnaire de 23,478*
Réponse :
$23{,}478 = \dfrac{23\,478}{1\,000} \longleftarrow$ *Au numérateur on écrit le nombre en « effaçant » la virgule (ici 23,478 devient 23 478), au dénominateur on écrit 10, 100 ou 1 000 en fonction du nombre de chiffre derrière la virgule (ici 3 chiffres ⇒ 1 000).*

Exercice 6 (sur ce TD) : Relie chaque nombre décimal à son écriture fractionnaire :

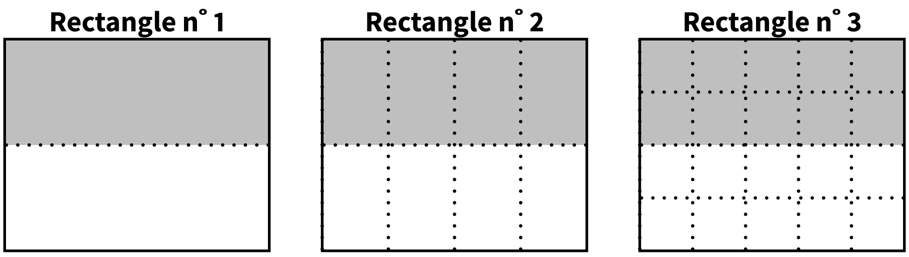
23,6 •	• $\dfrac{476}{100}$
4,76 •	• $\dfrac{6\,314}{10}$
631,4 •	• $\dfrac{476}{10}$
0,17 •	• $\dfrac{236}{10}$
9,05 •	• $\dfrac{905}{100}$
0,476 •	• $\dfrac{476}{1\,000}$
47,6 •	• $\dfrac{17}{100}$

Exercice 7 (sur ce TD) : Donne *une* écriture fractionnaire des nombres ci-dessous :

$F = 3{,}6$	$G = 0{,}01$	$H = 4{,}5$	$I = 2{,}38$	$J = 7$
$F = \ldots\ldots \div \ldots\ldots$				
$F = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$				

II — Fractions égales et simplification

Exercice 8 (sur ce TD) : Les rectangles suivant ont les même dimensions :



1. Quel rectangle a la plus grande partie coloriée ?
2. En utilisant le quadrillage, pour chaque rectangle, donne la fraction de la partie coloriée.
3. Que peut-on en conclure ?
4. Complète :

$1 \times 4 = \ldots\ldots$	$1 \times 10 = \ldots\ldots$	$4 \times 2{,}5 = \ldots\ldots$
$2 \times 4 = \ldots\ldots$	$2 \times 10 = \ldots\ldots$	$8 \times 2{,}5 = \ldots\ldots$

Règle 1 (« règle d'or des fractions »)

Si l'on multiplie ou divise le numérateur $\boxed{\text{ET}}$ le dénominateur d'une fraction par un même nombre (non nul), alors on obtient une fraction qui lui est égale.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2}{9} \\
A &= \frac{2\times 5}{9\times 5} && \longleftarrow \text{ on multiplie le numérateur \underline{et} le dénominateur par un même nombre : 5} \\
A &= \frac{10}{45} && \longleftarrow \text{ les fractions } \frac{2}{9} \text{ et } \frac{10}{45} \text{ sont donc égales : } \frac{2}{9} = \frac{10}{45}
\end{aligned}
$$

■ **EXERCICE 9 (SUR CE TD) :** Complète les calculs suivants de sorte que les fractions qui se trouvent sur la première et la dernière ligne soient égales :

$K = \dfrac{7}{3}$	$L = \dfrac{1}{5}$	$M = \dfrac{2}{11}$	$N = \dfrac{5}{3}$	$O = \dfrac{7}{5}$
$K = \dfrac{7 \times 2}{3 \times \quad}$	$L = \dfrac{\quad \times 3}{5 \times \quad}$	$M = \dfrac{\quad}{\quad \times 10}$	$N = \dfrac{\quad \times 2}{\quad}$	$O = \dfrac{\quad \times \quad}{\quad \times \quad}$
$K = \dfrac{\quad}{\quad}$	$L = \dfrac{3}{\quad}$	$M = \dfrac{\quad}{110}$	$N = \dfrac{\quad}{\quad}$	$O = \dfrac{\quad}{20}$

■ **EXERCICE 10 (SUR CE TD) :** Détermine une fraction égale à la fraction donnée :

$P = \dfrac{14}{8}$	$Q = \dfrac{24}{15}$	$R = \dfrac{\quad}{16}$	$S = \dfrac{50}{30}$	$T = \dfrac{20}{10}$
$P = \dfrac{14 \div 2}{8 \div \quad}$	$Q = \dfrac{24 \div \quad}{15 \div 3}$	$R = \dfrac{\quad}{\quad \div 4}$	$S = \dfrac{\quad \div 10}{\quad}$	$T = \dfrac{\quad}{\quad}$
$P = \dfrac{\quad}{\quad}$	$Q = \dfrac{\quad}{\quad}$	$R = \dfrac{3}{\quad}$	$S = \dfrac{\quad}{\quad}$	$T = \dfrac{10}{\quad}$

Rappel 3

Les tables de multiplications permettent de décomposer les nombres sous forme de produit de nombres entiers

Exemples :

- ⋆ *Une décomposition de 21 :* $21 = 7 \times 3$
- ⋆ *Une décomposition de 40 :* $40 = 8 \times 5$, *mais il en existe d'autres !*
- ⋆ *Une décomposition de 2 :* $2 = 1 \times 2$

■ **EXERCICE 11 (SUR CE TD) :** Complète les opérations à trou suivantes, en évitant si possible d'utiliser le nombre "1" :

a) $8 \times \boxed{\quad} = 16$	b) $\boxed{\quad} \times 10 = 70$	c) $5 \times \boxed{\quad} = 45$	d) $\boxed{\quad} \times 9 = 54$
e) $11 \times \boxed{\quad} = 88$	f) $9 \times \boxed{\quad} = 9$	g) $\boxed{\quad} \times 4 = 28$	h) $\boxed{\quad} \times 73 = 73$

■ **EXERCICE 12 (SUR CE TD) :** Pour chaque nombre, trouve une décomposition en produit de nombres entiers :

a) $45 = \ldots \times \ldots$	b) $18 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$	c) $70 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$	d) $7 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
e) $6 = \ldots \times \ldots$	f) $30 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$	g) $5 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$	h) $66 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

Règle 2

Pour simplifier une fraction, on décompose son numérateur $\boxed{\text{ET}}$ son dénominateur sous forme de multiplications de nombres entiers. On « élimine » ensuite tous les nombres en communs dans ces deux multiplications.

Exemple :

Question : *simplifie* $\dfrac{18}{12}$.

Réponse :

$$\frac{18}{12} = \frac{6\times 3}{2\times 6} \longleftarrow \textit{on décompose 18 et 12 : } 18 = 6\times 3 \textit{ et } 12 = 6\times 2$$

$$\frac{18}{12} = \frac{\cancel{6}\times 3}{2\times \cancel{6}} \longleftarrow \textit{on élimine ce qui est en commun dans chaque multiplication, ici ce sont les 6}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} \longleftarrow \textit{on écrit le résultat (= ce qui reste...)}$$

■ **Exercice 13 (sur ce TD) :** Complète les simplifications de fractions suivantes :

$U = \dfrac{15}{20}$	$V = \dfrac{8}{6}$	$W = \dfrac{32}{24}$	$X = \dfrac{160}{280}$	$Y = \dfrac{14}{49}$
$U = \dfrac{5\times 3}{5\times \quad}$	$V = \dfrac{\quad\times\quad}{2\times\quad}$	$W = \dfrac{\quad\times\quad}{8\times\quad}$	$X = \dfrac{10\times\quad}{\quad\times\quad}$	$Y = \dfrac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$
$U = \dfrac{\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}\times \quad}$	$V = \dfrac{\quad\times\quad}{\cancel{2}\times\quad}$	$W = \dfrac{\quad\times\quad}{\cancel{8}\times\quad}$	$X = \dfrac{\cancel{10}\times\quad}{\quad\times\quad}$	$Y = \dfrac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$
$U = \dfrac{3}{\quad}$	$V = \dfrac{\quad}{\quad}$	$W = \dfrac{\quad}{\quad}$	$X = \dfrac{\quad}{\quad}$	$Y = \dfrac{\quad}{\quad}$

■ **Exercice 14 (sur ce TD) :** Simplifie les fractions suivantes :

a) $M = \dfrac{56}{16}$	b) $A = \dfrac{35}{45}$	c) $R = \dfrac{88}{33}$	d) $S = \dfrac{2}{8}$

III — Mettre au même dénominateur deux fractions

Règle 3

Pour réduire deux fractions au le même dénominateur, on multiplie le numérateur $\boxed{\text{ET}}$ le dénominateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre.

Exemple

On veut écrire $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{5}{4}$ au même dénominateur :

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\times 4}{3\times 4}$	$\dfrac{5}{4} = \dfrac{5\times 3}{4\times 3}$
$\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$	$\dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{12}$

Les fractions obtenues ont maintenant le même dénominateur : 12.

■ **Exercice 15 (sur ce TD) :** Réduire au même dénominateur…

…les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{3}$.

Réponse :

$$\frac{2}{7} = \frac{2\times 3}{7\times} = \frac{}{}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\times 7}{\times 7} = \frac{}{}$$

…les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$.

Réponse :

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times}{4\times} = \frac{}{}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{\times}{\times} = \frac{}{}$$

■ **Exercice 16 (sur ce TD) :** Réduis au même dénominateur les fractions

a) $\frac{7}{3}$ et $\frac{2}{10}$: $\quad \frac{7}{3} = \frac{7\times}{3\times} = \frac{}{}$ $\quad$ et $\quad \frac{2}{10} = \frac{2\times}{10\times} = \frac{}{}$.

b) $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{9}$:

c) 3 et $\frac{5}{6}$:

IV — Fraction d'une quantité

Règle 4

Pour calculer une fraction d'un nombre, on multiplie cette fraction et ce nombre. On rappelle que le mot « de » en français (et ses déclinaisons « des », « de la » ou « du ») se traduisent mathématiquement par une multiplication ($\times$).

Exemple :

Question : *calculer les deux tiers de 6 L.*

Réponse :

le « de » correspond à une multiplication

« deux tiers »

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\times 6 &= \frac{2\times 6}{3} && \longleftarrow \textit{on multiplie les numérateurs}\\
&= \frac{12}{3} && \longleftarrow \textit{on calcule la multiplication}\\
&= 12\div 3 && \longleftarrow \textit{le trait de fraction correspond à une division}\\
&= 4\text{ L} && \longleftarrow \textit{on calcule } \textbf{\textit{et on n'oublie pas l'unité}}
\end{aligned}$$

■ **Exercice 17 (sur ce TD) :** Calcule les quantités suivantes :

$\frac{5}{3}$ de 9 L :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3}\times 9 &= \frac{}{3}\\
&= \frac{}{3}\\
&= \div 3\\
&=
\end{aligned}$$

$\frac{1}{4}$ de 8 kg :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\times 8 &= \frac{}{}\\
&= \frac{}{}\\
&= \div\\
&=
\end{aligned}$$

Le tiers de 27 € :

$$\begin{aligned}
\frac{}{}\times 27 &=\\
&=\\
&=\\
&=
\end{aligned}$$

■ **EXERCICE 18 (SUR CE TD) :**

1. Calcule $\frac{8}{7}$ de 14 L : ....
2. Calcule $\frac{2}{5}$ de 30 g : ....
3. Les trois quarts de 1 km : ....

■ **EXERCICE 19 (DANS TON CAHIER) :** Voici quelques petits problèmes à résoudre :

1. Hicham avait 20 bonbons. Il en a mangé les $\frac{4}{5}$.
   Combien en a-t-il mangé ?
2. Lise avait 28€. Elle en a depensé les $\frac{3}{7}$.
   Combien d'argent lui reste-t-il ?
3. Un collège compte 600 élèves. Les $\frac{2}{3}$ sont externes et les autres élèves sont demi-pensionnaires.
   Combien ce collège compte-il d'élèves demi-pensionnaires ?

Exercice ① (dans ton cahier)

Effectue les calculs ci-dessous, en soulignant à chaque étape l'opération prioritaire :

$A = 12 + 4 \times 7$	$B = 5 \times 8 - 2 \times 7$	$C = 9 - \dfrac{6}{3}$	$D = \dfrac{2+8}{6-1}$	$E = 5 \times \big(2 \times (9 - 3 \times 3)\big)$
$F = \dfrac{12}{4} + \dfrac{18}{6}$	$G = 8 \div 4 \times 7 \times 2$	$H = 2 \times (8 - 2 + 4)$	$I = 5 - 2 + 3$	$J = (9 - 7) \times (2 + 3 \times 7)$

Exercice ② (dans ton cahier)

Construis les triangles suivants en vraie grandeur :

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3{,}8$ cm et $AC = 4{,}9$ cm.
2. AEF est un triangle tel que $AE = 5{,}6$ cm, $AF = 6{,}2$ cm et $EF = 8$ cm.
3. AHI est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AH = 3{,}6$ cm.
4. Dans chaque triangle, trace la hauteur issue de A.

Exercice ③ (dans ton cahier)

Mettre au même dénominateur les fractions suivantes :

$\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{7}{5}$	$\dfrac{2}{10}$ et $\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{12}{9}$ et $\dfrac{11}{7}$	8 et $\dfrac{7}{4}$

Exercice ④ (dans ton cahier)

Calcule les produits ci-dessous :

$$A = 8 \times \frac{2}{3} \qquad B = \frac{6}{5} \times 3 \qquad C = 5 \times \frac{1}{5} \qquad D = \frac{9}{2} \times 7 \qquad E = 4 \times \frac{10}{4}$$

Exercice ⑤ (dans ton cahier)

Simplifie les fractions suivantes :

a) $\dfrac{30}{18}$ b) $\dfrac{14}{18}$ c) $\dfrac{300}{400}$ d) $\dfrac{21}{70}$ e) $\dfrac{5}{40}$

Exercice ⑥ (dans ton cahier)

1. Les tribunes d'un stade de foot, pouvant contenir 10 000 spectateurs, sont remplies aux trois quarts. Quel est le nombre de spectateurs présents ?

2. Pour arroser son jardin Anne-Marie récupère l'eau de pluie dans une citerne d'une capacité de 2 700 L. Celle-ci est actuellement remplie aux $\frac{4}{5}$.
   Sachant qu'elle utilise environ 90 L par jour, aura-t-elle suffisamment d'eau de pluie pour une durée de trois semaines sans pluie ?

3. Eloi prend les $\frac{2}{6}$ et Farid les $\frac{3}{8}$ des 24 billes d'un sac.
   Combien en ont-ils chacun, et combien reste-t-il de billes ?