Chapitre 7 : Les puissances

I_ Puissance d'un nombre rationnel:

1°/ Puissance à exposant positif:

a_ Définition et vocabulaire:

a un nombre rationnel et n un nombre entier naturel

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a exposant n
(a puissance n) → a^n ← exposant
base

b_ Cas particuliers:

Si a est un nombre rationnel non nul alors: $a^0 = 1$, $a^1 = a$

* a^2 se lit: a exposant 2 ou a puissance 2 ou a au carré
* a^3 se lit: a exposant 2 ou a puissance 3 ou a au cube

Remarque: La puissance 0^0 n'existe pas

c_ Exemples:

* $2^3 = 2\times2\times2 = 8$
* $(-5)^2 = (-5)\times(-5) = 25$
* $11^3 = 11\times11\times11$
* $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$
* $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 = \left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64}$
* $\left(\frac{11}{45}\right)^0 = 1$
* $(-25)^1 = -25$

d_ Remarque importante:

a un nombre rationnel non nul, n un entier naturel

* Si n est pair, alors: $(-a)^n = a^n$
* Si n est impair, alors: $(-a)^n = -a^n$

* Exemples:

* $(-4)^3 = -4^3 = -4\times4\times4 = -64$
* $(-5)^4 = 5^4 = 5\times5\times5\times5 = 625$
* $\left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{16}{9}$

2°/ Puissance à exposant négatif:

a_ Définition:

Soient x et $\frac{a}{b}$ deux nombres rationnels non nul et n un entier positif.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b_ Exemples:

* $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
* $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$
* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$
* $\left(\frac{-13}{25}\right)^{-2} = \left(\frac{-25}{13}\right)^2$

3°/ Le signe d'une puissance:

a_ Règle:

Le signe d'une puissance de base

- positif → positif
- négatif
  - exposant positif → positif
  - exposant négatif → négatif

b_ Exemples:

* 7^{35} est positif car la base est positif
* $(-11)^{24}$ est positif car l'exposant 24 est pair
* $\left(-\frac{4}{7}\right)^{33}$ est négatif car la base $-\frac{4}{7}$ est négatif et l'exposant 33 est impair

4°/ Exercice d'application

Calculer les puissances suivantes:

25^2, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$, $\left(\frac{-7}{5}\right)^{-3}$, $\left(\frac{-9}{7}\right)^{-2}$; $\left(\frac{-1}{2}\right)^{5}$

* Solution :

* $25^2 = 25 \times 25 = 625$
* $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$
* $\left(\frac{-7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{7}\right)^{3} = -\left(\frac{5}{7}\right)^{3} = -\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = -\frac{125}{343}$
* $\left(\frac{-9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{-9}\right)^{2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{2} = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$
* $\left(\frac{-1}{2}\right)^{5} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
  $= -\frac{1}{32}$

II _ Les opérations sur les puissances:

1°/ Propriétés:

a, b deux nombres rationnels non nuls, n et m deux nombres entiers relatifs.

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\qquad a^n \times b^n = (a \times b)^n$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n \times m}$

2°/ Exemples:

* $7^2 \times 7^{15} = 7^{2+15} = 7^{17}$
* $\left(\frac{-7}{5}\right)^{11} \times \left(\frac{-7}{5}\right)^{-20} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{11+(-20)} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{-9}$
* $\frac{12^{23}}{12^{15}} = 12^{23-15} = 12^{8}$
* $\frac{\left(\frac{7}{11}\right)^{-17}}{\left(\frac{7}{11}\right)^{-20}} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17-(-20)} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17+20}$
  $= \left(\frac{7}{11}\right)^{3}$
* $25^{14} \times 10^{14} = (25 \times 10)^{14} = (250)^{14}$
* $\left(\frac{-5}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{-5}{3} \times \frac{1}{2}\right)^{4} = \left(\frac{-5}{6}\right)^{4}$
* $\frac{21^5}{3^5} = \left(\frac{21}{3}\right)^{5} = 7^5$
* $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3}{\left(\frac{-1}{3}\right)^3} = \left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{3}}\right)^{3} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{-3}{1}\right)^{3} = \left(\frac{-6}{5}\right)^{3}$
* $(12^{-5})^4 = 12^{-5 \times 4} = 12^{-20}$
* $\left(\left(\frac{-7}{6}\right)^{11}\right)^{-6} = \left(\frac{-7}{6}\right)^{11 \times (-6)} = \left(\frac{-7}{6}\right)^{-66}$

3°/ Exercices d'application:

* Exercice ①: Calculer les puissances suivantes:

$A = \left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{2}$
$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{1+2}$
$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{3}$
$= \frac{-1}{8}$

$B = \left(\frac{11}{7}\right)^{11} \times \left(\frac{11}{7}\right)^{-11}$
$= \left(\frac{11}{7}\right)^{11-11}$
$= \left(\frac{11}{7}\right)^{0}$
$= 1$

$C = \frac{5^{7}}{5^6 \times (5^2)^{-1}}$
$= \frac{5^7}{5^6 \times 5^{-2}}$
$= \frac{5^7}{5^{6-2}}$
$= \frac{5^7}{5^4}$
$= 5^{7-4}$
$= 5^3$
$= 125$

$D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3}$
$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{6-6}$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$
$= 1$

* Exercice ②: Soient a, b deux nombres rationnels non nuls

Ecrire sous forme d'une puissance:

$A = a^{-3} \times a^4 \times \frac{1}{a^7}$
$= a^{-3+4} \times a^{-7}$
$= a^1 \times a^{-7}$
$= a^{1-7}$
$= a^{-6}$

$B = \frac{(a^5 \times a)^{-2}}{a^3}$
$= \frac{(a^{5+1})^{-2}}{a^3}$
$= \frac{(a^6)^{-2}}{a^3}$
$= \frac{a^{-12}}{a^3}$
$= a^{-12-3}$
$= a^{-15}$

$c = \frac{(a\times b^{2})^{-3}\times a}{a^{-5}\times b^{-3}}$

$= \frac{a^{-3}\times b^{-6}\times a}{a^{-5}\times b^{-3}}$

$= \frac{a^{-3+1}\times b^{-6}}{a^{-5}\times b^{-3}} = \frac{a^{-2}\times b^{-2}}{a^{-5}\times b^{-3}}$

$= a^{-2+5}\times b^{-2+3}$

$= a^{3}\times b$

III – L'écriture scientifique:

1°/ Définition

Soient a un nombre décimal et n un nombre entier relatif non nul. Toute écriture de la forme

$x = a\times 10^{n}$ ou $x = -a\times 10^{n}$ avec $1 \leq a < 10$

s'appelle écriture scientifique de x

2°/ Exemples:

Cherchons l'écriture scientifique des nombres suivants:

$a = 3452$

$= 3,452\times 10^{3}$

$b = -0,00000234$

$= -2,34\times 10^{-6}$

$c = 678,25\times 10^{5}$

$= 6,7825\times 10^{2}\times 10^{5}$

$= 6,7825\times 10^{7}$

$d = -0,000254\times 10^{-9}$

$= -2,54\times 10^{-4}\times 10^{-9}$

$= -2,54\times 10^{-13}$

$e = -24,5\times 10^{-11}\times 1,2\times 10^{-3}$

$= -24,5\times 1,2\times 10^{-11}\times 10^{3}$

$= -29,4\times 10^{-8}$

$= -2,94\times 10\times 10^{-8}$

$= -2,94\times 10^{-7}$

$f = -113\times 10^{5} + 7,2\times 10^{7}$

$= -113\times 10^{5}\times 7,2\times 10^{2}\times 10^{5}$

$= -113\times 10^{5} * 720\times 10^{5}$

$= (113+720)\times 10^{5}$

$= 607\times 10^{5}$

$= 6,07\times 10^{2}\times 10^{5}$

$= 6,07\times 10^{7}$

3°/ Ordre de grandeur:

Ecriture scientifique	Encadrement par deux puissances successives de 10	Un ordre de grandeur
$A = 2,13\times 10^{5}$	$10^{5} < A < 10^{6}$	2×10^{5}
$B = 7,28\times 10^{-3}$	$10^{-3} < B < 10^{-2}$	7×10^{-3}
$C = 9,62\times 10^{-5}$	$10^{-5} < C < 10^{-4}$	9×10^{-5}