

5ème - Triangles

COMPÉTENCES ÉVALUÉES DANS CE CHAPITRE :

(T : compétences transversales, N : activités numériques, G : activités géométriques, F : gestion de données et fonctions)

Intitulé des compétences		Eval.1	Eval.2	Eval.3
T1	Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours	○ ○	○ ○	○ ○
T3	Construire une figure géométrique aux instruments d'après un programme de construction	○ ○	○ ○	○ ○
G7	Utiliser le résultat sur la somme des angles dans un triangle (*)	○ ○	○ ○	○ ○
G8	Utiliser les propriétés relatives aux angles des triangles particuliers (*)	○ ○	○ ○	○ ○
G9	Utiliser l'inégalité triangulaire (*)	○ ○	○ ○	○ ○
G10	Construire un triangle connaissant trois longueurs, deux longueurs et un angle ou une longueur et deux angles(*)	○ ○	○ ○	○ ○
G11	Utiliser la définition de la médiatrice d'un segment ainsi que la caractérisation de ses points par la propriété d'équidistance (*)	○ ○	○ ○	○ ○
G12	Tracer la médiatrice d'un segment par différentes méthodes	○ ○	○ ○	○ ○
G13	Construire le cercle circonscrit à un triangle (*)	○ ○	○ ○	○ ○
G14	Utiliser la définition d'une médiane, d'une hauteur dans un triangle	○ ○	○ ○	○ ○
		Taux de réussite :%		
		Note du chapitre :/20		
		Moyenne de la classe :/20		

* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

Légende du tableau de compétences :

- Deux points verts :** *Je sais très bien faire*
- Un point vert :** *Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*
- Un point rouge :** *Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*
- Deux points rouges :** *Je sais pas faire du tout*

17.1 Somme des mesures des angles dans un triangle

Somme des angles dans un triangle

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est toujours égale à 180°

Exemple d'utilisation : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle

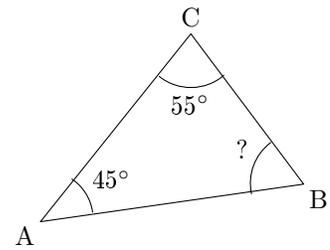
Dans le triangle ABC, la somme des mesures des angles vaut 180° ;

$$\text{on a ainsi } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 180^\circ$$

$$\text{D'où } \widehat{ABC} + 55^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

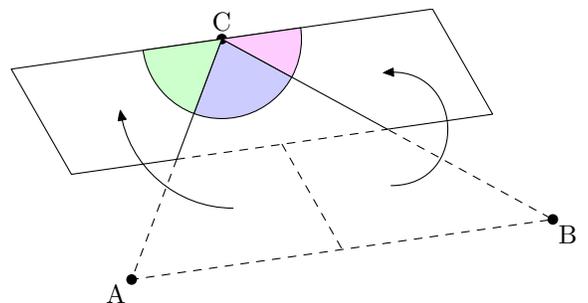
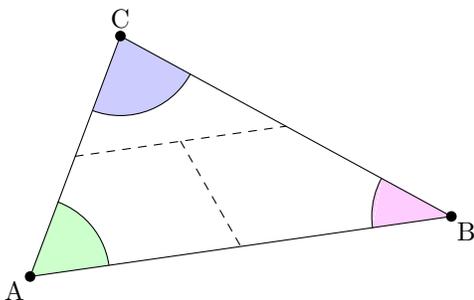
$$\text{d'où } \widehat{ABC} + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\text{et donc } \boxed{\widehat{ABC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ}$$



Visualisation de cette propriété

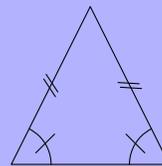
On colore chacun des angles \widehat{ABC} , \widehat{BCA} et \widehat{CAB} d'une couleur différente, puis on découpe selon les pointillés (comme indiqué ci-dessous) avant de "recoller" les trois angles pour former un angle plat (qui mesure donc 180° ...)



17.2 Angles et triangles particuliers

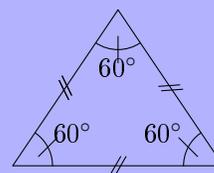
Le cas du triangle isocèle

- Si un triangle est isocèle, **alors** ses deux angles à la base sont de même mesure.
- Si, dans un triangle, deux angles ont même mesure, **alors** ce triangle est isocèle.



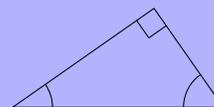
Le cas du triangle équilatéral

- Si un triangle est équilatéral, **alors** tous ses angles mesurent 60° .
- Si, dans un triangle, les trois angles mesurent 60° , **alors** ce triangle est équilatéral.



Le cas du triangle rectangle

- Si un triangle est rectangle, **alors** ses deux angles aigus sont complémentaires (*c'est-à-dire que la somme de leurs mesures vaut 90°*).
- Si, dans un triangle, deux angles sont complémentaires, **alors** ce triangle est rectangle.



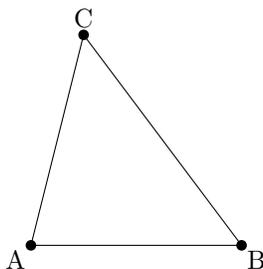
17.3 Utiliser l'inégalité triangulaire

Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{cases} AB < AC + CB \\ AC < AB + BC \\ BC < BA + AC \end{cases}$$



Plus communément, cette propriété revient à dire que, pour aller du point A au point B, il est plus court d'aller directement de A à B (*en suivant le segment [AB]*) que de passer par C (*si celui-ci n'est pas sur le trajet direct, c'est-à-dire le segment [AB]*)

Vérifier qu'un triangle est constructible

Pour vérifier s'il est possible de construire un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés, il suffit de vérifier que la longueur du plus grand côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

Exemple 1

On veut savoir si le triangle ABC, avec $AB=6\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$ et $BC=3,5\text{ cm}$ est constructible ou pas.

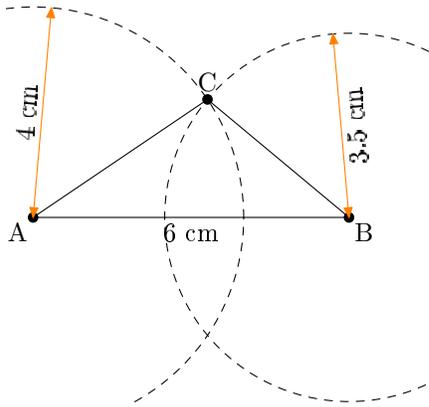
On prend la longueur du plus long côté :

$$AB=6\text{ cm}$$

et on compare avec la somme des longueurs des deux autres côtés :

$$AC+BC=4+3,5=7,5\text{ cm.}$$

Comme $AB < AC+BC$, le triangle **est** constructible.



Exemple 2

On veut savoir si le triangle ABC, avec $AB=7\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$ et $BC=2,5\text{ cm}$ est constructible ou pas.

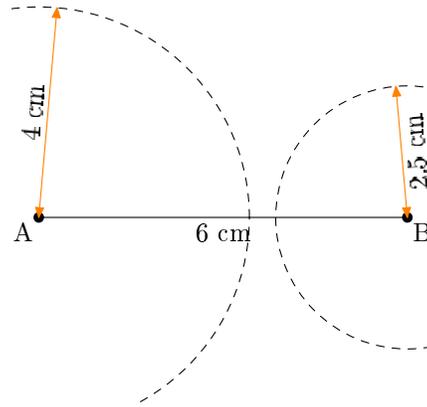
On prend la longueur du plus long côté :

$$AB=7\text{ cm}$$

et on compare avec la somme des longueurs des deux autres côtés :

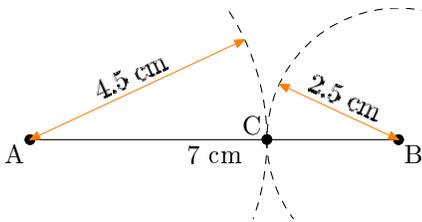
$$AC+BC=4+2,5=6,5\text{ cm.}$$

Comme $AB > AC+BC$, le triangle **n'est pas** constructible.



Cas d'égalité

- Si un point M appartient au segment $[AB]$, alors on a $AB=AM+MB$
- Si trois points A, B et M sont tels que $AB=AM+MB$, alors M appartient au segment $[AB]$.



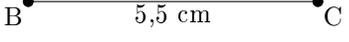
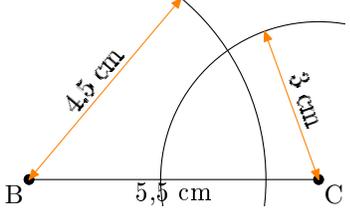
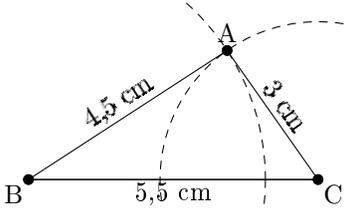
Par exemple, ici on a $AB=7\text{ cm}$, $AC=4,5\text{ cm}$ et $CB=2,5\text{ cm}$.
On a donc $AB=AC+BC$, donc C est sur $[AB]$.
(On peut voir ABC comme un "triangle aplati")

17.4 Construction de triangles

Voir page suivante :

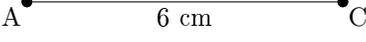
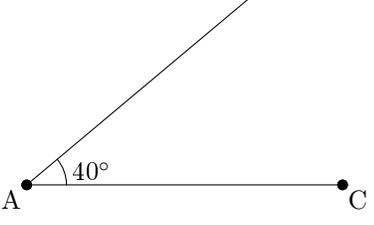
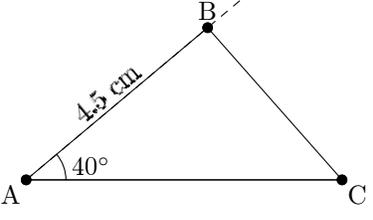
► **Connaissant les longueurs des trois côtés**

On cherche à tracer le triangle ABC tel que $AB=4,5\text{cm}$, $BC=5,5\text{cm}$ et $AC=3\text{cm}$.

		
<p>① Traçons le côté le plus long; ici, il s'agit de [BC] qui a pour longueur 5,5 cm.</p>	<p>② Traçons deux arcs de cercle : le premier de centre B et de rayon 4,5 , le second de centre C de rayon 3</p>	<p>③ Le point A est à l'intersection des deux arcs de cercle ; terminons en traçant le triangle ABC</p>

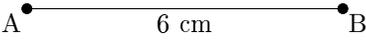
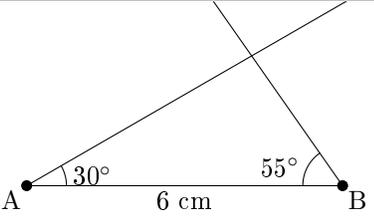
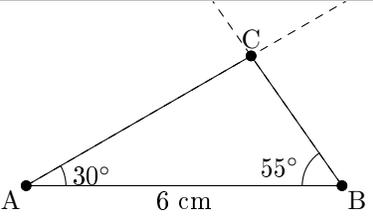
► **Connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces côtés**

On cherche à tracer le triangle ABC tel que $AB=4,5\text{cm}$, $AC=6\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

		
<p>① Traçons un des côtés dont la longueur est connue; ici par exemple [AC], qui a pour longueur 6 cm.</p>	<p>② Traçons une demi-droite d'origine A formant un angle de 40° avec la demi-droite [AC]</p>	<p>③ Mesurons 4,5 cm sur cette demi-droite à partir de A pour placer le point B ; terminons en traçant le triangle</p>

► **Connaissant la longueur d'un côté et les mesures des deux angles qui lui sont adjacents**

On cherche à tracer le triangle ABC tel que $AB=6\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ et $\widehat{ABC} = 55^\circ$.

		
<p>① Traçons l'unique côté dont la longueur est connue; ici c'est [AB], qui a pour longueur 6 cm.</p>	<p>② Traçons une demi-droite d'origine A formant un angle de 30° avec la demi-droite [AB], puis une demi-droite d'origine B formant un angle de 55° avec la demi-droite [BA]</p>	<p>③ Le point C est à l'intersection de ces deux demi-droites; terminons en traçant le triangle</p>

17.5 Médiatrice d'un segment

Définition

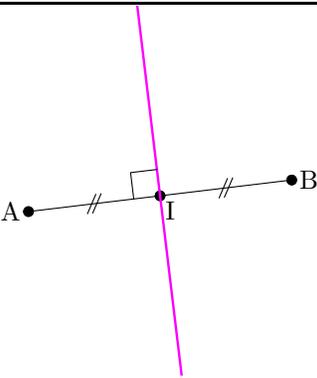
La **médiatrice** d'un segment est la droite qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son milieu.

Propriété d'équidistance

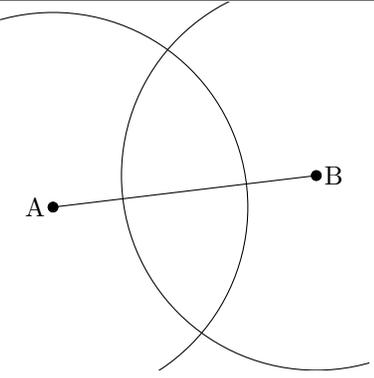
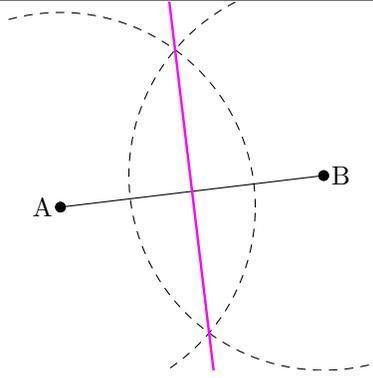
- Si un point M est situé sur la médiatrice du segment $[AB]$,
alors on est sûr que ce point M est à égale distance des extrémités A et B .
- Si un point M est situé à égale distance des extrémités A et B ,
alors on est sûr que ce point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

17.6 Comment construire la médiatrice d'un segment ?

► Construction d'une médiatrice à la règle graduée et à l'équerre :

 <p>Point A on the left, point B on the right, connected by a horizontal line segment.</p>	 <p>Point A on the left, point I in the middle, point B on the right. Tick marks on segments AI and IB indicate they are equal in length.</p>	 <p>Point A on the left, point I in the middle, point B on the right. A vertical pink line passes through point I, perpendicular to segment AB. A right-angle symbol is shown at the intersection.</p>
Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$:	① on place le point I milieu du segment $[AB]$	② on trace la perpendiculaire à (AB) passant par I

► Construction d'une médiatrice à la règle non graduée et au compas :

 <p>Point A on the left, point B on the right, connected by a horizontal line segment.</p>	 <p>Point A on the left, point B on the right. Two overlapping circles are drawn with centers at A and B. The circles intersect at two points, one above and one below the segment AB.</p>	 <p>Point A on the left, point B on the right. Two overlapping circles are drawn with centers at A and B. A vertical pink line passes through the two intersection points of the circles, perpendicular to segment AB.</p>
Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$:	① on trace deux cercles de centres A et B de même rayon, assez grand	② on trace la droite qui joint les points d'intersection de ces deux cercles

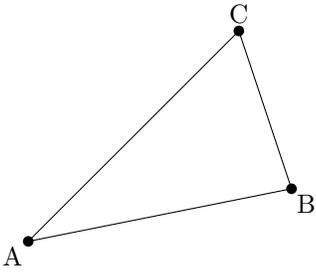
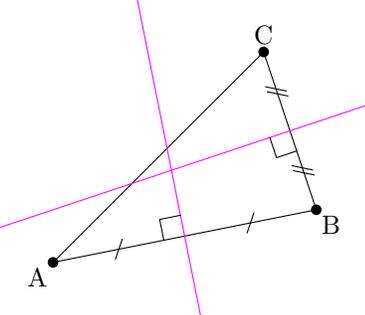
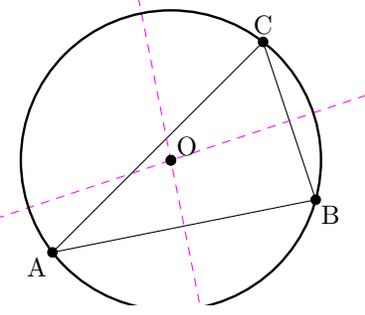
17.7 Cercle circonscrit à un triangle

Propriété et définition

Etant donné un triangle quelconque (non aplati), les médiatrices des trois côtés du triangle passent par un même point ; on dit qu'elles sont **concourantes**.

Le point commun à ces trois médiatrices est le centre d'un cercle **passant par les trois sommets** du triangle. Ce cercle est appelé **cercle circonscrit au triangle**

► Construction du cercle circonscrit à un triangle

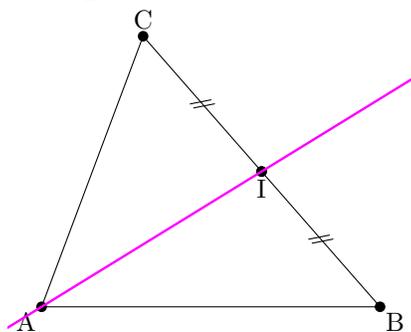
 <p>Pour tracer le cercle circonscrit à un triangle :</p>	 <p>① on trace les médiatrices de deux côtés (la troisième n'est pas nécessaire)</p>	 <p>② on trace le cercle en plaçant la pointe du compas sur le point d'intersection des médiatrices, et la mine sur l'un des trois sommets</p>
--	---	---

17.8 Médiane, hauteur dans un triangle

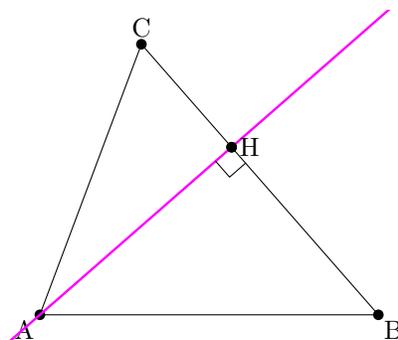
Définitions

- Dans un triangle, on appelle **médiane** une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.
- Dans un triangle, on appelle **hauteur** une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

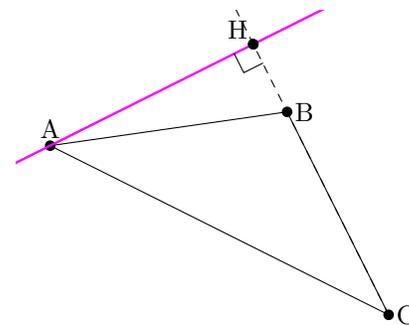
Exemples :



Dans ce triangle, (AI) est la **médiane** issue de A



Dans ce triangle, (AH) est la **hauteur** issue de A ; on dit que H est le **pied** de cette hauteur.



Dans ce triangle, (AH) est la **hauteur** issue de A (*il a fallu prolonger le côté [BC] pour tracer cette hauteur*)