Chapitre 1 : Nombres rationnels : introduction et comparaison

I - Nombre rationnel :

1) Définition :

Un nombre rationnel est le quotient d'un nombre entier relatifs a par un nombre entier relatif non nul noté $\frac{a}{b}$

a : est appelé numérateur

b : est appelé dénominateur

2) Exemples :

Les nombres suivants sont des nombres rationnels : $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{-11}{-3}$, $\frac{9}{-5}$

* **Remarque importante :**

1) Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel

* Exemples : $25 = \frac{25}{1}$

$0,12 = \frac{12}{100}$, $-3,42 = \frac{-342}{100}$

2) On peut le nombre rationnel sous la forme $\frac{-2,5}{3}$, $\frac{1}{-0,5}$, $\frac{-3,7}{-2,42}$

Car $\frac{-3,7}{-2,42} = \frac{-370}{-242}$

3) Si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel alors :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} , \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

3) Le signe d'un nombre rationnel :

a - Activité ① :

En utilisant la division euclidienne, calculer les quotients suivants $\frac{3}{4}$ et $\frac{-15}{2}$, après déduire leurs signe.

Solution On a :

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -15 & 2 \\ \hline -14 & -7,5 \\ -10 & \\ -10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc : $\frac{3}{4} = 0,75$ et $\frac{-15}{2} = -7,5$

Alors le nombre $\frac{3}{4}$ est positif et le nombre $-\frac{15}{2}$ est négatif.

b - Règle ① :

* $\frac{a}{b}$ est positif si a et b sont de même signe.

* $\frac{a}{b}$ est négatif si a et b sont de signes différents.

c - Exemples :

* $\frac{7}{5}$ et $\frac{-31}{-12}$ sont des nombres rationnels positifs

* $\frac{-15}{17}$ et $\frac{11}{-2}$ sont des nombres rationnels négatifs.

4) Exercice d'application :

1) Ecrire les nombres suivants sous forme de fraction

2,73 , -3,6 , 54 , 7,211 , -30,1

2) Déterminer le signe des nombres suivants :

$\frac{9}{17}$, $\frac{-1}{216}$, $\frac{3}{128}$, $\frac{-2}{-24}$, $\frac{1}{-12}$, $\frac{-15}{36}$

Solution :

1) $2,73 = \frac{273}{100}$, $-3,6 = \frac{-36}{10}$, $54 = \frac{54}{1}$

$7,211 = \frac{7211}{1000}$, $-30,1 = \frac{-301}{10}$

2)

Les nombres rationnels positifs sont : $\frac{9}{17}$, $\frac{3}{128}$, $\frac{-2}{-24}$

Les nombres rationnels négatifs sont : $\frac{-1}{216}$, $\frac{1}{-12}$, $\frac{-15}{36}$

5) Le nombre rationnel et équation :

a - Règle ② :

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$ tel que a et b sont des nombres entiers relatifs et b est non nul

b) Exemples :

* La solution de l'équation $-2x = 5$ est le nombre rationnel $\frac{5}{-2}$

* La solution de l'équation $3x = -11$ est le nombre rationnel $\frac{-11}{3}$

* La solution de l'équation $-4x = -7$ est le nombre rationnel $\frac{-7}{-4}$ càd $\frac{7}{4}$

II - Egalité de deux nombres rationnels

1) Activité ②:

1) Compléter en utilisant l'un des symboles $=$ ou $\neq$

$\frac{-3}{4}$ ... $\frac{-6}{8}$ et $\frac{9}{20}$ ... $\frac{3}{7}$

$(-3)\times 8$ ... $4\times(-6)$ et 9×7 ... 20×3

2) Qu'est ce que vous remarquez ?

Solution:

1)
$$\begin{array}{r|l} -6 & 8 \\ \cline{2-2} -60 & -0,75 \\ -40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3 & 4 \\ \cline{2-2} -30 & -0,75 \\ -20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0,428 \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

$\frac{-6}{8} = -0,75$ $\qquad$ $\frac{-3}{4} = -0,75$ $\qquad$ $\frac{3}{7} \simeq 0,428$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 20 \\ \cline{2-2} 90 & 0,45 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{9}{20} \simeq 0,45$

donc $\frac{-3}{4} = \frac{-6}{8}$ et $\frac{9}{20} \neq \frac{3}{7}$

On a $\begin{cases} (-3)\times 8 = -24 \\ 4\times(-6) = -24 \end{cases}$ et $\begin{cases} 9\times 7 = 63 \\ 20\times 3 = 60 \end{cases}$

donc $(-3)\times 8 = 4\times(-6)$ et $9\times 7 \neq 20\times 3$

2) On remarque que

$(-3)\times 8 = 4\times(-6)$ donc $\frac{-3}{4} = \frac{-6}{8}$

$9\times 7 \neq 20\times 3$ donc $\frac{9}{20} \neq \frac{3}{7}$

2) Règle ③

$\frac{a}{b}$ et $\frac{x}{y}$ deux nombres rationnels

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ signifie que $a\times y = b\times x$

3) Exemples:

1) Comparons les nombres $\frac{18}{8}$ et $\frac{9}{4}$

On a $\begin{cases} 18\times 4 = 72 \\ 8\times 9 = 72 \end{cases}$ d'où $18\times 4 = 8\times 9$

d'où $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

2) Comparons les nombres $\frac{-7}{5}$ et $\frac{3}{-11}$

On a $\begin{cases} (-7)\times(-11) = 77 \\ 5\times 3 = 15 \end{cases}$ donc $(-7)\times(-11) \neq 5\times 3$

d'où $\frac{-7}{5} \neq \frac{3}{-11}$

4) Réduction d'un nombre rationnel:

a - Propriété ①

Si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel et k un nombre entier relatif non nul, alors:

$\frac{a\times k}{b\times k} = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\frac{a\div k}{b\div k} = \frac{a}{y}$

La forme trouvée finalement s'appelle La forme irréductible.

b) Exemples:

* $\frac{12}{18} = \frac{\cancel{6}\times 2}{\cancel{6}\times 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{-15}{25} = \frac{\cancel{5}\times(-3)}{\cancel{5}\times 5} = \frac{-3}{5}$

$\frac{12}{-24} = \frac{\cancel{12}\times 1}{\cancel{12}\times(-2)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

* Rendons les nombres suivants irréductible.

* $\frac{21\times 6\times 11}{7\times 22\times 3} = \frac{\cancel{7}\times\cancel{3}\times 3\times\cancel{2}\times\cancel{11}}{\cancel{7}\times\cancel{11}\times\cancel{2}\times\cancel{3}} = \frac{3}{1} = 3$

* $\frac{-30\times 25\times 2}{15\times 5\times 6} = \frac{\cancel{15}\times(-2)\times\cancel{5}\times 5\times\cancel{2}}{\cancel{15}\times\cancel{5}\times\cancel{2}\times 3} = \frac{-10}{3}$

III - Réduire au même dénominateur:

1) Définition:

Pour réduire deux nombres rationnels au même dénominateur, on cherche le plus petit multiple commun de leurs dénominateurs.

2) Exemples:

* Cas ①: Si l'un des deux dénominateurs est multiple de l'autre, donc le dénominateur commun est le plus grand des dénominateurs

$\frac{11}{25}$ et $\frac{3}{5}$

25 est multiple de 5, donc le dénominateur commun est 25

* $\frac{3}{5} = \frac{3\times5}{5\times5} = \frac{15}{25}$ et $\frac{11}{25}$

* **Cas ②:** Si l'un des deux dénominateurs n'est pas multiple de l'autre, mais ils ont autre diviseurs commun autre que 1

$\frac{-5}{12}$ et $\frac{7}{8}$

12 n'est pas multiple de 5 mais 4 est un diviseur commun de 12 et 8
donc le dénominateur commun est 24

$\frac{-5}{12} = \frac{(-5)\times2}{12\times2} = \frac{-10}{24}$

$\frac{7}{8} = \frac{7\times3}{8\times3} = \frac{21}{24}$

* **Cas ③:** Si les deux dénominateurs n'ont aucun diviseurs commun autre que 1

$\frac{3}{6}$ et $\frac{5}{11}$

Le dénominateur commun est 6×11=66

$\frac{3}{6} = \frac{3\times11}{6\times11} = \frac{33}{66}$ et $\frac{5}{11} = \frac{5\times6}{11\times6} = \frac{30}{66}$

Remarque importante:

Avant de réduire des nombres rationnels au même dénominateur, il faut d'abord les rendre irréductibles lorsque c'est possible

IV - Comparaison de deux nombres rationnels

1) Propriété ①:

* Le plus grand parmi deux nombres rationnels positifs est celui qui est plus loin de zéro.

* Le plus grand parmi deux nombres rationnels négatifs est celui qui est le plus proche de zéro

* Tout nombre positif non nul est plus grand que tout nombre négatif.

2) Exemples:

* $\frac{5}{7}$ et $\frac{11}{7}$

On a $11 > 5$ donc $\frac{11}{7} > \frac{5}{7}$

* $\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{9}$

On a $3 < 9$ donc $\frac{4}{3} > \frac{4}{9}$

* $\frac{-1}{2}$ et $\frac{6}{13}$

On a $\frac{-1}{2} < 0$ et $\frac{6}{13} > 0$ donc $\frac{6}{13} > \frac{-1}{2}$

* $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-7}{3}$

On a $\frac{-5}{4} = \frac{-5\times3}{4\times3} = \frac{-15}{12}$

et $\frac{-7}{3} = \frac{(-7)\times4}{3\times4} = \frac{-28}{12}$

or $-15 > -28$ donc $\frac{-15}{12} > \frac{-28}{12}$

càd $\frac{-5}{4} > \frac{-7}{3}$

Les exercices

* **exercice 2 page 16:**

* On a: $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

* $\frac{11}{4} = 2{,}75$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 30 & 2{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

* $\frac{-12}{9} = \frac{-4}{3} \simeq -1{,}333\ldots$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 10 & 1{,}333 \\ 10 & \end{array}$$

* $\frac{7}{-5} = -1{,}4$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 20 & 1{,}4 \\ 0 & \end{array}$$

* **Exercice 3 page 16:**

* On a: $\frac{39}{7} \simeq 5{,}57142\ldots$

donc une valeur approchée aux centièmes est 5,57

* On a: $\frac{-20}{11} \simeq -181818181$

donc une valeur approchée aux centièmes est $-1{,}81$

* On a $\frac{34}{3} \simeq 11{,}33333 \Rightarrow 11{,}33$