

*** بعد مراجعة دروسك اضبط ساعتك و أنجز هذا الغرض في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع احترام ضوابط و طقوس إنجاز فرض.**

المدة: ساعتان	فرض 1 الدورة 1	جدع مشترك علمي
---------------	----------------	----------------

تمرين 1

- 1- فكك العددين 540 و 396 إلى جداء عوامل أولية ثم حدد (540 ; 396) PGCD و (540 ; 396) PPCM
- 2- هل العددين التاليين أوليين علل جوابك. 607 و 997

تمرين 2

- 1- ليكن n عدد صحيح طبيعي
بين أن $n^2 + n + 3$ عدد فردي
- 2- ليكن n عدد صحيح طبيعي IN
أ- تأكد أن $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$
ب- بين أن العدد $n^3 + 3n^2 + 2n$ يقبل القسمة على 3

تمرين 3

- ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$
1- بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية
- 2- حل المعادلة $m^2 - n^2 = 96$

تمرين 4

- ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه النقطة O .
نعتبر I و J و E نقط حيث $\vec{BI} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ و $\vec{AJ} = \frac{3}{2}\vec{AD}$ و $\vec{BE} = -\frac{1}{2}\vec{BA}$
- 1- أنشئ الشكل
- 2- /a بين أن $\vec{OI} = -\frac{1}{4}\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{BC}$ و $\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BC}$
b/ استنتج أن النقط O و I و J مستقيمة
- 3- بين أن I منتصف $[AE]$
- 4- بين أن $(IJ) \parallel (CE)$

تمرين 5

- ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع حيث $AD = 6cm$ و I و J نقطتين حيث $\vec{AI} = -\frac{1}{4}\vec{AB}$
و $AJ = 4,5cm$ و $J \in [AD]$. ليكن K تقاطع (AC) و (IJ) . نعتبر B' و D' مسقطا B و D على (AC) بتواز مع (IJ)
- 1- أنشئ الشكل ثم بين أن $\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AD}$
- 2- بين أن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف
- 3- بين أن $\vec{AK} = -\frac{1}{4}\vec{AB}$ و $\vec{AK} = \frac{3}{4}\vec{AD}$
- 4- عبر عن $\vec{AC}$ بدلالة $\vec{AK}$

تمرين 1

1- نفكك العددين 540 و 396 إلى جداء عوامل أولية

$$\begin{array}{r|l}
 396 & 2 \\
 198 & 2 \\
 99 & 3 \\
 33 & 3 \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 540 & 2 \\
 270 & 2 \\
 135 & 3 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

نحدد PGCD (540 ; 396) و PPCM (540 ; 396)

$$\text{PPCM} (540 ; 396) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11 = 5940$$

$$\text{PGCD} (540 ; 396) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

2- نرى هل العددين التاليين أوليين 607 و 997

* الأعداد الأولية التي مربعها أصغر أو يساوي 607 هي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23
607 لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأولية إذن 607 عدد أولي* الأعداد الأولية التي مربعها أصغر أو يساوي 997 هي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23 و 29 و 31
997 لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأولية إذن 997 عدد أولي

تمرين 2

1- نبين أن $n^2 + n + 3$ عدد فردي
ليكن n عدد صحيح طبيعي

$$n^2 + n + 3 = n(n+1) + 3$$

نعلم أن جداء عددين صحيحين طبيعيين متتاليين عدد زوجي و منه $n(n+1)$ عدد زوجينعلم أن مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي و منه $n^2 + n + 3 = n(n+1) + 3$ عدد فردي

$$-2 \quad \text{أ- نتأكد أن } n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$$

$$n(n+1)(n+2) = (n^2 + n)(n+2)$$

$$= n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

ب- نبين أن العدد $n^3 + 3n^2 + 2n$ يقبل القسمة على 3ليكن n عدد صحيح طبيعي IN و منه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$

$$\text{لدينا } n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$$

$$\text{إذا كان } n = 3k \text{ فإن } n^3 + 3n^2 + 2n = 3[k(3k+1)(3k+2)]$$

$$\text{إذن } n^3 + 3n^2 + 2n \text{ يقبل القسمة على } 3$$

$$\text{إذا كان } n = 3k + 1 \text{ فإن } n^3 + 3n^2 + 2n = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3[(3k+1)(3k+2)(k+1)]$$

$$\text{إذن } n^3 + 3n^2 + 2n \text{ يقبل القسمة على } 3$$

$$\text{إذا كان } n = 3k + 2 \text{ فإن } n^3 + 3n^2 + 2n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3[(3k+2)(k+1)(3k+4)]$$

$$\text{إذن } n^3 + 3n^2 + 2n \text{ يقبل القسمة على } 3$$

إذن لكل عدد صحيح طبيعي n : $n^3 + 3n^2 + 2n$ يقبل القسمة على 3

تمرين 3

1- نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجيةليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

إذا كان $m - n$ زوجي فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m - n = 2k$
ومنه $m - n + 2n = 2k + 2n$ أي $m + n = 2(k + n)$

اذن $m + n$ زوجي

إذا كان $m - n$ فردي فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m - n = 2k + 1$

ومنه $m - n + 2n = 2k + 1 + 2n$ أي $m + n = 2(k + n) + 1$

اذن $m + n$ فردي

و بالتالي $m + n$ و $m - n$ لهما نفس الزوجية

2- نحل المعادلة $m^2 - n^2 = 96$

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

$$m^2 - n^2 = 96 \text{ تكافئ } (m - n)(m + n) = 96$$

ومنه $m + n$ و $m - n$ من قواسم 96

نعلم أن قواسم 96 هي 1 - 96 - 2 - 48 - 3 - 32 - 4 - 24 - 6 - 16 - 8 - 12

و حيث $m + n$ و $m - n$ لهما نفس الزوجية و $m + n \geq m - n$ فان:

$$\begin{cases} m + n = 12 \\ m - n = 8 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m + n = 16 \\ m - n = 6 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m + n = 24 \\ m - n = 4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m + n = 48 \\ m - n = 2 \end{cases}$$

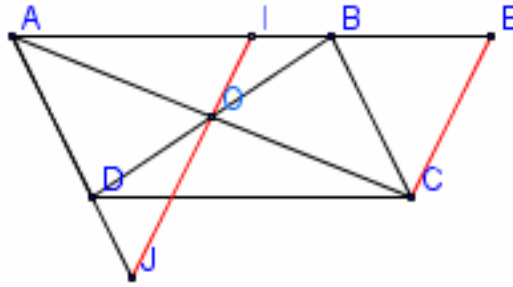
$$\text{إذن } \begin{cases} m = 10 \\ n = 2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m = 11 \\ n = 5 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m = 14 \\ n = 10 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m = 25 \\ n = 23 \end{cases}$$

تمرين 4

$ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه النقطة O .

$$\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

1- نشئ الشكل



$$2- \text{a/ نبين أن } \overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\text{* لدينا } \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI}$$

O مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ ومنه $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ و O منتصف $[BD]$ أي

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \text{ و بالتالي } \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB})$$

$$\text{و حيث أن } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \text{ فان } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{* لدينا } \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$O \text{ مركز متوازي الأضلاع } ABCD \text{ ومنه } \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

$$\text{وحيث أن } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \text{ فان } \overrightarrow{OJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

b/ نستنتج أن النقط O و I و J مستقيمة

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \text{ و } \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ} \text{ إذن النقط } O \text{ و } I \text{ و } J \text{ مستقيمية}$$

3- نبين أن I منتصف $[AE]$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \text{ ومنه } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{و بالتالي } \overrightarrow{AI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IE} \text{ إذن } I \text{ منتصف } [AE]$$

4- نبين أن $(IJ) \parallel (CE)$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \text{ ومنه } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \text{ أي أن } \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{ومنه } \frac{-3}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{و بالتالي } \frac{-3}{2}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{IJ}$$

$$\text{إذن } (IJ) \parallel (CE)$$

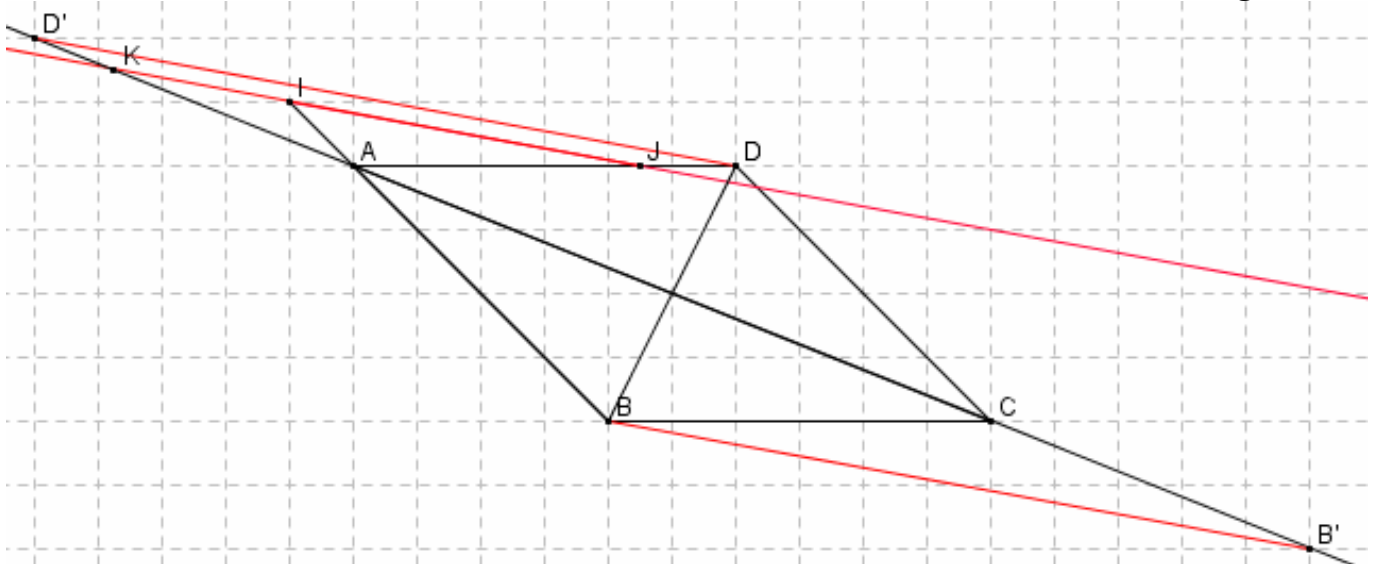
تمرين 5

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع حيث $AD = 6cm$ و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

و $AJ = 4,5cm$ و $J \in [AD]$. ليكن K تقاطع (IJ) و (AC) . نعتبر B' و D' مسقطا B و D

على (AC) بتواز مع (IJ)

1- الشكل



$$\text{نبين أن } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{لدينا } \frac{AJ}{AD} = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4} \text{ ومنه } AJ = \frac{3}{4}AD \text{ أي } \|\overrightarrow{AJ}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AD}\|$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \text{ فان } J \in [AD]$$

2- نبين أن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فان $[AC]$ و $[BD]$ هما نفس المنتصف O

و حيث أن الإسقاط يحافظ على المنتصف و O و B' و D' مساقط O و B و D على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي فان O منتصف $[B'D']$

إذن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

$$3- \text{ نبين أن } \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB'} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD'}$$

لدينا $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ و A و K و B' مساقط O و I و B على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي

وحيث أن الإسقاط يحافظ على معامل الاستقامية فان $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB'}$

لدينا $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD}$ و A و K و D' مساقط O و J و D على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي

$$\text{فان } \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD'}$$

4- عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AK}$

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

وحيث أن A و C و B و D مساقط A و C و B' و D' على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي فان

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$$

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB'} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD'} \quad \text{أي } -4\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB'} \quad \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD'}$$

$$\text{و منه } \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AK} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AK}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{AC} = -\frac{8}{3}\overrightarrow{AK}$$