فرض محروس رقم 3

ثانوية محمد الخامس التأهيلية	السنة الثانية شعبة العلوم الرياضية أ – ب	بتاريخ : 4 ماي 2016
المادة : رياضيات	المدة : ساعتان و نصف	المعامل : 9

سلم التنقيط

تمرين في الاحتمالات (5نقط)

صندوق يحتوي على أربع كرات سوداء و ثلاث كرات بيضاء.
نقوم بالتجربة التالية:
نسحب كرة من الصندوق - إذا كانت سوداء نرجعها إلى الصندوق و نسحب تآنيا كرتين من هذا الصندوق .
- إذا كانت بيضاء نضعها جانبا و نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من هذا الصندوق.

1) بين أن عدد الامكانيات المرتبطة بهذه التجربة هو 174 . — 0.5 ن

2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{47}{245}$. — 0.5 ن

3) علما أن الكرات الثلاث من نفس اللون ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة في السحبة الاولى بيضاء؟ — 0.5 ن

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء التي بقيت في الصندوق بعد انتهاء التجربة.

أ) حدد القيم الممكنة ل X . — 0.5 ن

ب) بين أن $p\left(X=1\right)=\frac{76}{245}$ و أن $p\left(X=2\right)=\frac{122}{245}$. — 1 ن

ج) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي — 1.5 ن

5) نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات مع إعادة الكرات المسحوبة إلى الصندوق في كل مرة. — 0.5 ن
ما هو الاحتمال لكي نحصل على ثلاث كرات من نفس اللون مرتين بالضبط؟ أعط النتيجة بإفراط إلى $0,01$.

مسألة في التحليل (15 نقطة)

I) لتكن u الدالة العددية المعرفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$ ب :
$$\begin{cases} u\left(x\right)=\dfrac{1}{\ln\left(x\right)}\,;x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\\ u\left(0\right)=0 \end{cases}$$

1) أ) أدرس اتصال و اشتقاق الدالة u على اليمين في 0 . — 0.5 ن

ب) احسب نهايات الدالة u و حدد الفروع اللانهائية للمنحنى C_u . — 1 ن

ج) أدرس تغيرات الدالة u ثم ضع جدول تغيراتها. — 1 ن

2) أ) بين أن $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right);\dfrac{x^2-x}{2\ln\left(x\right)}\le\int_x^{x^2}u\left(t\right)dt\le\dfrac{x^2-x}{\ln\left(x\right)}$.(قم بفصل حالتين). — 1.5ن

ب) نضع $\varphi\left(x\right)=\int_x^{x^2}u\left(t\right)dt$. — 1ن

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi\left(x\right)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\varphi\left(x\right)}{x}$

II) لتكن v الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب :
$$\begin{cases} v\left(x\right)=\left(x-1\right)u\left(x\right);x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\\ v\left(0\right)=0;v\left(1\right)=1 \end{cases}$$

1) أ) بين أن الدالة v متصلة على $[0,+\infty[$. — 1 ن

ب) أدرس قابلة اشتقاق الدالة v على اليمين في 0و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. — 0.5 ن

2) أ) بين أن $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); v'(x)=\dfrac{1-x+x\ln(x)}{x\ln^2(x)}$	0.25 ن
ب) بين أن $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); x\ln(x)>x-1$	0.5 ن
ج) ضع جدول تغيرات الدالة v وأنشئ منحناها C_v في معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$	1 ن
(نقبل أن v قابلة للاشتقاق في 1 و ان $v'(1)=\dfrac{1}{2}$)	
3) بين أن: $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); \mathrm{x}-1\leq\int_x^{x^2}\dfrac{v(t)}{t}dt\leq\dfrac{x^2-1}{2}$.(قم بفصل حالتين)	1.5 ن
III) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب:	
$\begin{cases} f(x)=\ln(1+x)-\int_x^{x^2}u(t)\,dt; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$	
1) أ) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (استعمل السؤال 2) ب) من I)	0.5 ن
ب) أدرس الفرع اللانهائي ل C_f	0.5 ن
2) أ) بين أن $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-\int_x^{x^2}\dfrac{v(t)}{t}dt$.	0.5 ن
ب) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في 1 .(استعمل السؤال 3) من II)	1 ن
ج) استنتج أن $\lim\limits_{x\to1}\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}dt=\ln 2$	0.25 ن
3) أ) بين أن : $\exists\alpha\in]0,1[; f'(\alpha)=0$.	0.25 ن
ب) بين أن $\left(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-v(x)$.	0.25 ن
4) أ) بين أن الدالة f' تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم استنتج اشارتها.	0.75 ن
ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.25 ن
IV) لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{x+1}e^{\int_x^{x^2}u(t)dt}; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ F(0)=F(1)=1 \end{cases}$	
1) تحقق أن $\left(\forall x\in [0,+\infty[\right); F(x)=e^{-f(x)}$	0.5 ن
2) حدد الفرع اللانهائي ل C_F	0.25 ن
3) ضع جدول تغيرات الدالة F	0.5 ن

إنتهى