أولى علوم رياضية	فرض رقم 3	2017-16

تمرين (1)

نعتبر العبارتين : P "$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\exists n \in \mathbb{N})\quad nx > 1$ "

$$Q"\left[(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |x| < \frac{1}{n}\right] \Rightarrow x = 0$$

1) حدد نفي كل من العبارتين P و Q

2) نضع $p = E\left(\frac{1}{x}\right)$ بين أن العبارة P صحيحة

تمرين (2)

1) بين أن "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\quad (x > 2$ و $y > 2) \Rightarrow (xy > x + y)$ "

2) بالمضاد للعكس بين أن $(\forall x > 2)(\forall y > 2)\quad (x \neq y) \Rightarrow \left(x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1}\right)$

تمرين (3)

باستعمال برهان بالترجع بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right) \quad (1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k+1} k = n + 1 \quad (2)$$

تمرين (3)

ليكن a , b عددين بحيث $0 < a < b$.

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{a+b}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{ab}{a + b - U_n}$

1) أحسب U_1 و بين أن $(\forall n \in \mathbb{N})\quad a < U_n < b$

2) بين أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

3) نضع $V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b}$ لكل عدد طبيعي n

أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$

ب) بين أن $U_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

تمرين (4)

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث : $U_0 = 2$ و $U_1 = 1$ و $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

1) أحسب U_2 و U_3

2) نضع $V_n = U_{n+1} - 3U_n$

بين ان $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

تصحيح الفرض المحروس رقم 3

التمرين 1

1) لدينا: P "$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists n\in\mathbb{N})\ nx > 1$"

إذن $\bar{P}$ "$(\exists x\in\mathbb{R}^{+*})(\forall n\in\mathbb{N})\ nx \leq 1$"

• ولدينا Q "$[(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ |x| < \frac{1}{n}] \Rightarrow x=0$"

- نفي العبارة Q :

نعلم أن نفي الاستلزام $a \Rightarrow b$

هي العبارة a و $\bar{b}$

ومنه فإن:

$\bar{Q}$ "$((\forall n\in\mathbb{N}^*)\ |x| < \frac{1}{n})$ و $x\neq 0$"

2) P: "$(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists n\in\mathbb{N})\ nx > 1$"

لنبين أن P صحيحة

$$nx > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x}$$

ونعلم أن $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right)+1$

نضع $p = E\left(\frac{1}{x}\right)$ عدد طبيعي لأن $\left(\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{+*}\right)$

ومنه $p \leq \frac{1}{x} < p+1$; نضع $n = p+1$

$$\frac{1}{x} < n$$

إذن $(\exists n = p+1 \in\mathbb{N})\ nx > 1$

التمرين 2

1) بين أن $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)(x>2 ; y>2) \Rightarrow (xy > x+y)$

$$(x>2 , y>2) \Rightarrow (x-1 > 1 ; y-1 > 1)$$
$$\Rightarrow (x-1)(y-1) > 1$$
$$\Rightarrow 1+xy-x-y > 1$$
$$\Rightarrow xy > x+y$$

2) بين بالاستدلال بالعكس: $(\forall x>2)(\forall y>2): (x\neq y) \Rightarrow (x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

أي نبين أن

$(\forall x>2)(\forall y>2).\ (x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1}) \Rightarrow (x=y)$

$$x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2(y-1) = y^2(x-1)$$
$$\Rightarrow x^2y - x^2 - y^2x + y^2 = 0$$
$$\Rightarrow xy(x-y) - (x-y)(x+y) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(xy-x-y) = 0$$

وبما أن $(\forall x>2)(\forall y>2)\quad xy > x+y$

فإن $xy - x - y \neq 0$

وعليه $x = y$

وبالتالي فإن

$$(\forall x>2)(\forall y>2): [x\neq y \Rightarrow x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1}]$$

التمرين 3

1) بين بالترجع أن

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$$

من أجل $n=0$

لدينا $\frac{1+1}{3^1} = \frac{2}{3}$

و $\frac{1}{4}\left(5 - \frac{2\times1+5}{3^1}\right) = \frac{2}{3}$

علاقة صحيحة

نفترض أن: $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$

ونبين أن: $\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k+1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} + \frac{n+2}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right) + \frac{n+2}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n} + \frac{4n+8}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{6n+15-4n-8}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+7}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$$

وحسب مبدأ الترجع فإن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$$

2) بين بالترجع أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*).\ \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$$

من أجل $n=1$

لدينا $\sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+1} k = 1-2+3 = 2 = 1+1$

علاقة صحيحة.

نفترض أن $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$

ونبين أن $\displaystyle\sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^{k+1} k = n+2$

لدينا $$\sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k + (-1)^{2n+3}(2n+2) + (-1)^{2n+4}(2n+3)$$
$$= n+1-(2n+2)+(2n+3)$$
$$= n+1-\cancel{2n}-2+\cancel{2n}+3$$
$$= n+2$$

وبالتالي فإن $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$$

التمرين 4 :

1) احسب u_1 وبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad a < u_n < b$

لدينا $$u_1 = \frac{ab}{a+b-u_0}$$
$$= \frac{ab}{a+b-\frac{a+b}{2}}$$
$$= \frac{2ab}{2a+2b-a-b}$$
$$u_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

من أجل $n=0$ $\quad a < u_0 = \frac{a+b}{2} < b$ صحيحة

نفترض أن : $a < u_n < b$

ونبين أن : $a < u_{n+1} < b$

لدينا $$a < u_n < b$$
$$-b < -u_n < -a$$
$$a < a+b-u_n < b$$
$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a+b-u_n} < \frac{1}{a}$$
$$a < \frac{ab}{a+b-u_n} < b$$
$$a < u_{n+1} < b$$

وحسب مبدأ الترجع

فإن : $a < u_n < b$

2) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية :

يعني نبين أن $u_{n+1} < u_n$

لدينا $$u_{n+1}-u_n = \frac{ab}{a+b-u_n} - u_n$$
$$= \frac{ab - a u_n - b u_n + u_n^2}{a+b-u_n}$$
$$= \frac{a(b-u_n) - u_n(b-u_n)}{a+b-u_n}$$
$$= \frac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n}$$

ولدينا $a < u_n < b$

يعني $-b < -u_n < -a$

$a - u_n < 0$ و $b - u_n > 0$

وبما أن $0 < a < a+b-u_n < b$

فإن $\dfrac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n} < 0$

إذن $u_{n+1} < u_n$

ومنه فإن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

3) أ- بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{a}{b}$

لدينا $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$$
$$= \frac{\frac{ab}{a+b-u_n} - a}{\frac{ab}{a+b-u_n} - b}$$
$$= \frac{ab - a^2 - ab + a u_n}{ab - ab - b^2 + b u_n}$$
$$= \frac{a(a-u_n)}{b(b-u_n)}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{u_n-a}{u_n-b}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot v_n$$

إذن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$

٢) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

نضع $V_n = u_{n+1} - 3u_n$

لدينا

$$V_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 2u_{n+1} - 6u_n$$
$$= 2(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= 2 \cdot V_n$$

إذن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

من إنجاز التلميذ ياسر السياري

التمرين 4 :

3) ب- لدينا

$$V_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$
$$V_n u_n - bV_n = u_n - a$$
$$V_n u_n - u_n = bV_n - a$$
$$u_n(V_n - 1) = bV_n - a$$
$$u_n = \frac{bV_n - a}{V_n - 1}$$

وعلما أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$ و $V_0 = -1$

فإن:

$$V_n = V_0 q^n$$
$$V_n = -\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

وعليه:

$$u_n = \frac{-b\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n - a}{-\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}$$
$$u_n = \frac{-\frac{a^n b}{b^n} - \frac{ab^n}{b^n}}{-\frac{a^n}{b^n} - \frac{b^n}{b^n}}$$
$$u_n = \frac{-a^n b - ab^n}{-a^n - b^n}$$
$$u_n = \frac{a^n b + ab^n}{a^n + b^n}$$

ب- لنبين أن $u_n = \dfrac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = \dfrac{a\cdot b^0 + b\cdot a^0}{a^0 + b^0}$

$u_0 = \dfrac{a+b}{2}$ صحيحة

نفترض أن : $u_n = \dfrac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

ونبين أن : $u_{n+1} = \dfrac{ab^{n+1} + ba^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

لدينا

$$u_{n+1} = \frac{ab}{a+b-u_n}$$
$$= \frac{ab}{a+b-\frac{ab^n+ba^n}{a^n+b^n}}$$
$$= \frac{ab}{\frac{(a+b)(a^n+b^n) - ab^n - ba^n}{a^n+b^n}}$$
$$= \frac{ab(a^n+b^n)}{a\cdot a^n + \cancel{ab^n} + \cancel{ba^n} + b\cdot b^n - \cancel{ab^n} - \cancel{ba^n}}$$
$$= \frac{b\cdot a^{n+1} + ab^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

وحسب مبدأ التراجع فإن

$$u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$$

التمرين 5 :

1) احسب u_2 و u_3

لدينا

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0$$
$$= 5\times 1 - 6\times 2$$
$$= 5 - 12$$
$$u_2 = -7$$

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1$$
$$= 5\times(-7) - 6\times 1$$
$$= -35 - 6$$
$$u_3 = -41$$