السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات ـ الحساب المثلثي	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

نعتبر المتتاليات العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases} \quad و \quad \forall n \in IN \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad و \quad \forall n \in IN \quad w_n = 2^n u_n$$

1) بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وحدد حدها العام

2) بين أن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية وحدد حدها العام

3) أوجد الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

4) احسب بدلالة n المجموع : $\sum_{k=0}^{n} u_k$

5) استنتج حساب المجموع : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$

تمرين 2 : لكل عدد حقيقي x نعتبر التعبير : $A(x) = \cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x)$

1) بين أن : $\cos(3x) = \cos(x)\left(4\cos^2(x) - 3\right)$

2) استنتج أن : $A(x) = 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x))$

3) حل في IR المعادلة : $A(x) = 0$

4) حل في $]0;\pi[$ المعادلة : $A(x) \geq 0$

تمرين 3 : ABC مثلث حيث : $\left(\sin\hat{A}\right)^2 = \left(\sin\hat{B}\right)^2 + \left(\sin\hat{C}\right)^2$

بين أن ABC قائم الزاوية في A

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات ـ الحساب المثلثي حلول مقترحة	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :
$$\begin{cases} u_0 = 0;\quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases} \quad ، \quad \forall n \in IN \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad ، \quad \forall n \in IN \quad w_n = 2^n u_n$$

1

لدينا : $\forall n \in IN \quad v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$

إذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول هو $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$

منه : $\forall n \in IN \quad v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2

حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا : $\forall n \in IN \quad w_{n+1} - w_n = 2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = 2^{n+1}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

إذن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول هو $w_0 = 2^0 \times u_0 = 0$

منه : $\forall n \in IN \quad w_n = w_0 + rn = 2n$

3

بما أن : $\forall n \in IN \quad w_n = 2^n u_n$ فإن : $\forall n \in IN \quad u_n = \frac{w_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

4

لدينا : $\forall n \in IN \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ منه :
$$\begin{cases} u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 \\ u_3 = u_2 - \frac{1}{4}u_1 \\ u_4 = u_3 - \frac{1}{4}u_2 \\ \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

بجمع هذه المتساويات طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $u_{n+2} = u_1 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} u_k$

بالتالي : $\sum_{k=0}^{n} u_k = 4(u_1 - u_{n+2}) = 4\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$

5

نعلم أن : $\forall n \in IN \quad u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ و $\sum_{k=0}^{n} u_k = 4\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$

إذن : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} = 4\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$ منه : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{k}{2^k} = 4\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$ منه : $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}\right) = 4\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$

بالتالي : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 8\left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$

تمرين 2 : $A(x)=\cos(3x)+\sin(2x)-\cos(x)$

1 لدينا :

$$\begin{aligned}\cos(3x)&=\cos(2x+x)\\&=\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)\\&=\left(2\cos^2(x)-1\right)\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)\sin(x)\\&=\cos(x)\left(2\cos^2(x)-1-2\sin^2(x)\right)\\&=\cos(x)\left(2\cos^2(x)-1-2\left(1-\cos^2(x)\right)\right)\\\cos(3x)&=\cos(x)\left(4\cos^2(x)-3\right)\end{aligned}$$

2 لدينا :

$$\begin{aligned}A(x)&=\cos(3x)+\sin(2x)-\cos(x)\\&=\cos(x)\left(4\cos^2(x)-3\right)+2\sin(x)\cos(x)-\cos(x)\\&=\cos(x)\left(4\cos^2(x)-3+2\sin(x)-1\right)\\&=\cos(x)\left(4\left(1-\sin^2(x)\right)-3+2\sin(x)-1\right)\\&=\cos(x)\left(2\sin(x)-4\sin^2(x)\right)\\A(x)&=2\ \sin(x)\cos(3x)\left(1-2\sin(x)\right)\end{aligned}$$

3

$$A(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad 2\ \sin(x)\cos(3x)\left(1-2\sin(x)\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(\sin(x)=0\ \ ou\ \cos(3x)=0\ \ ou\ \ \sin(x)=\frac{1}{2}\right)$$

$$A(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(\begin{array}{l}x=k\pi\ /\ k\in Z\quad ou\quad 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z\quad ou\\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\quad ou\quad x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\end{array}\right)$$

$$A(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(\begin{array}{l}x=k\pi\ /\ k\in Z\quad ou\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\ /\ k\in Z\quad ou\\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\quad ou\quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\end{array}\right)$$

4 نعلم أن : $\forall x\in\left]0;\pi\right[\ \ \sin(x)>0$

$$A(x)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad 2\ \sin(x)\cos(3x)\left(1-2\sin(x)\right)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\cos(3x)\left(1-2\sin(x)\right)\geq 0$$

منه :

$$A(x)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\cos(3x)\left(2\sin(x)-1\right)\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\cos(3x)\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\right)\leq 0$$

لدينا : $x\in\left]0;\pi\right[\ \Leftrightarrow\ 3x\in\left]0;3\pi\right[$ منه :

$$\begin{cases}\cos(3x)\geq 0\\3x\in\left]0;3\pi\right[\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 3x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$$

و

$$\begin{cases}\sin(x)-\frac{1}{2}\geq 0\\x\in\left]0;\pi\right[\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos(3x)$		+		-		+		-	
$\sin(x)-\frac{1}{2}$		-		+		+		-	
$\cos(3x)\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\right)$		-		-		+		+	

بالتالي : $S=\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

تمرين 3 : ABC مثلث حيث : $\left(\sin \hat{A}\right)^2 = \left(\sin \hat{B}\right)^2 + \left(\sin \hat{C}\right)^2$

نعلم أن : $\dfrac{\sin \hat{C}}{AB} = \dfrac{\sin \hat{B}}{AC} = \dfrac{\sin \hat{A}}{BC}$ نضع : $\dfrac{\sin \hat{A}}{BC} = k$ منه : $k > 0$ (لأن : $0 < \hat{A} < ®$)

ومنه أيضا : $\dfrac{\sin \hat{B}}{AC} = k$ و $\dfrac{\sin \hat{C}}{AB} = k$

الآن :

$$\left(\sin \hat{A}\right)^2 = \left(\sin \hat{B}\right)^2 + \left(\sin \hat{C}\right)^2 \Rightarrow (k\,BC)^2 = (k\,AC)^2 + (k\,AB)^2 \Rightarrow k^2\ BC^2 = k^2\ AC^2 + k^2\ AB^2$$

$$\left(\sin \hat{A}\right)^2 = \left(\sin \hat{B}\right)^2 + \left(\sin \hat{C}\right)^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$$

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن ABC قائم الزاوية في A