| | | |
|---|---|---|
| السنة 1 بكالوريا علوم رياضية | عموميات حول الدوال<br>نموذج 1 | فروض النجاح<br>استعدادا لاجتياز فروضك |

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

**تمرين 1 :**

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $IR$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x$

1) تحقق أن : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2-3$ لكل $x\neq y$

2) استنتج رتابة $f$ على المجالات $[1,+\infty[$ و $[-1,1]$ و $]-\infty;-1]$

3) حدد نقط تقاطع $(\P f)$ منحنى الدالة $f$ مع محوري المعلم.

4) أوجد جدول تغيرات $f$ على $IR$ ثم أنشئ $(\P f)$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم.

5) حدد حسب قيم البارامتر الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $x^3-3x+1-m=0$

6) باستعمال نتائج السؤال 2)، أوجد معللا جوابك جدول تغيرات الدوال التالية :

$$g(x)=|x|^3-3|x|+1 \quad \text{و} \quad h(x)=\frac{x^3-3x}{5}+2 \quad \text{و} \quad h(x)=|x^3-3x|$$

7) اكتب على شكل مركب دالتين كلا من : $p(x)=x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+1$ و $q(x)=\dfrac{1}{x^3-3x}$

ثم استنتج رتابة كل منهما على مجموعة تعريفهما.

**تمرين 2 :** نعتبر الدالتين $f(x)=4x^3-3x$ و $g(x)=2x^2-1$

بين أن : $f\circ g(x)=g\circ f(x) \quad \forall x\in IR$

**تمرين 3 :** نعتبر الدالة $f(x)=1+\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

1) بين أن $Df=IR$

2) بين أن $f$ دورية أحد أدوارها 4 .

3) بين أن : $1\leq f(x)<3 \quad \forall x\in IR$

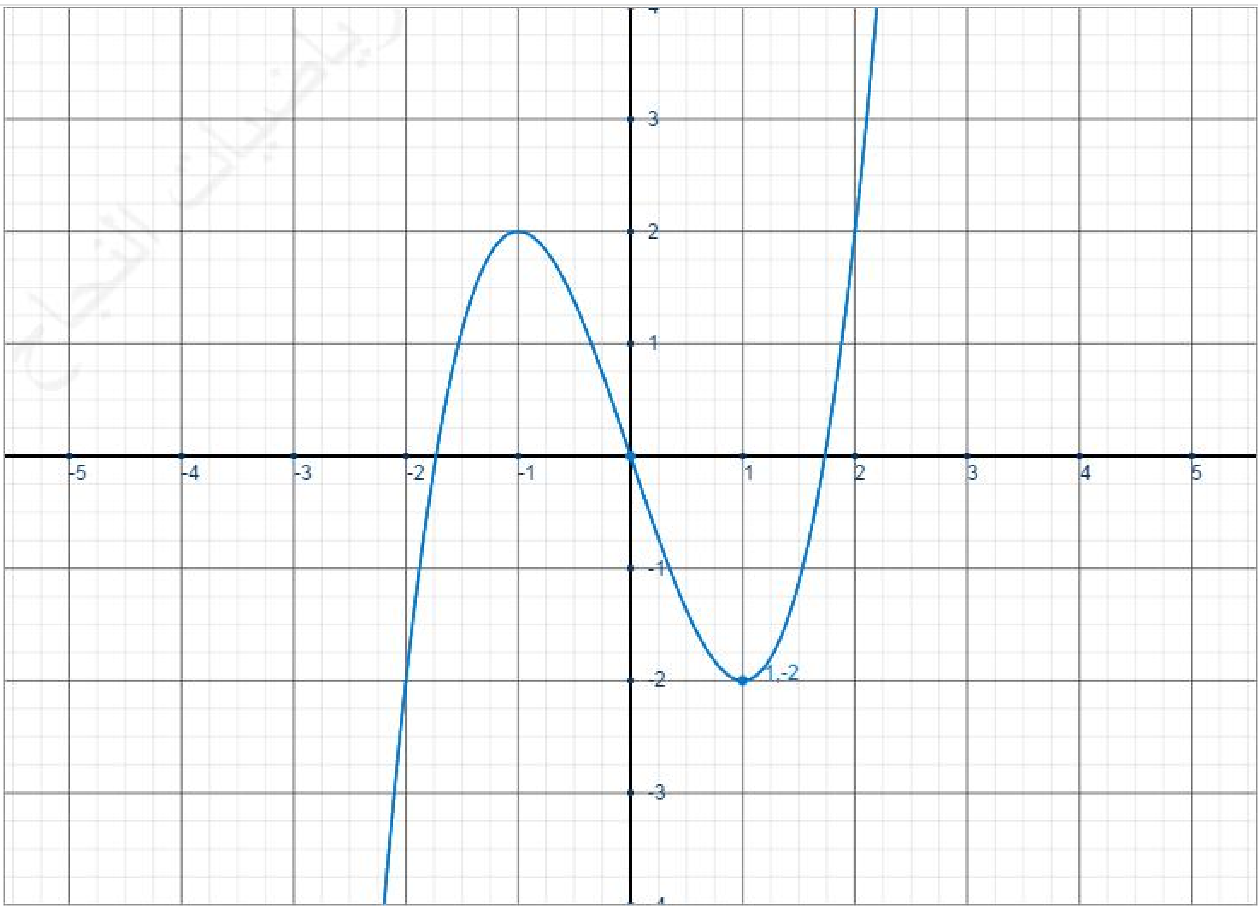
| فروض النجاح<br>استعدادا لاجتياز فروضك | عموميات حول الدوال<br>نموذج 1 ـ حلول مقترحة | السنة 1 بكالوريا علوم رياضية |
|---|---|---|

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

**تمرين 1 :** $f(x)=x^3-3x$

| | |
|---|---|
| 1 | لدينا لكل $x\neq y$ :<br>$f(x)-f(y)=(x^3-3x)-(y^3-3y)=x^3-y^3-3x+3y=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3(x-y)$<br>$f(x)-f(y)=(x-y)[x^2+xy+y^2-3]$<br>بالتالي : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2-3$ |
| 2 | ليكن $x$ و $y$ عددين مختلفين من $[1,+\infty[$ ، لدينا :<br>$\begin{cases}x\geq 1\\ y\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\geq 1\\ y^2\geq 1\\ xy\geq 1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+xy\geq 3\Rightarrow T(x,y)\geq 0$<br>ليكن $x$ و $y$ عددين مختلفين من $[-1,1]$ ، لدينا :<br>$\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\leq 1\\ y^2\leq 1\\ \|xy\|\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\leq 1\\ y^2\leq 1\\ -1\leq xy\leq 1\end{cases}\quad x^2+y^2+xy\leq 3\Rightarrow T(x,y)\leq 0$<br>ليكن $x$ و $y$ عددين مختلفين من $]-\infty;-1]$ ، لدينا :<br>$\begin{cases}x\leq -1\\ y\leq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x\geq 1\\ -y\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\geq 1\\ y^2\geq 1\\ xy\geq 1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+xy\geq 3\Rightarrow T(x,y)\geq 0$<br>إذن $f$ تزايدية على $[1,+\infty[$ و $]-\infty;-1]$ و تناقصية على $[-1,1]$ |
| 3 | لدينا : $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow x(x^2-2)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ x=\sqrt{2}\ ou\ x=-\sqrt{2}$<br>بالتالي $(Cf)$ يقطع محور الأفاصيل في النقط : $O(0\ ;\ 0)$ و $A(\sqrt{2}\ ;\ 0)$ و $B(-\sqrt{2}\ ;\ 0)$ |

4




5

لدينا : $f(x)=m-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1-m=0$

- إذا كان : $m-1<-2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا
- إذا كان : $m-1=-2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالظبط
- إذا كان : $-2<m-1<2$ فالمعادلة السابقة تقبل ثلاث حلول بالظبط
- إذا كان : $m-1=2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالظبط
- إذا كان : $m-1>2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا

6

باستعمال نتائج السؤال 2)، أوجد معللا جوابك جدول تغيرات الدوال التالية :

لدينا الدالة $p:\ x\to|x|^3-3|x|$ دالة زوجية و تساوي $f(x)$ على $[0;+\infty[$

إذن لها نفس رتابة $f$ على $[0;+\infty[$ و لها رتابة معاكسة في $]-\infty;0]$

و بكون $g(x)=p(x)+1$ فإن $g$ تزايدية على $[1,+\infty[$ و تناقصية على $[0,1]$ و $g$ تزايدية على $[-1,0]$ و تناقصية على $]-\infty;-1]$

بما أن $\frac{1}{5}>0$ فالدلة $x\to\frac{x^3-3x}{5}$ لها نفس تغيرات $f$ و بالتالي $h$ $x\to\frac{x^3-3x}{5}$ لها نفس تغيرات $f$

الدالة $h(x)=|f(x)|$ إذن $h(x)=f(x)$ عندما يكون $f(x)\geq 0$ أي عندما يكون : $x\in\left[-\sqrt{2};0\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

و $h(x)=-f(x)$

إذن $h$ تناقصية على $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و تزايدية على $\left[-\sqrt{2},-1\right]$ و تناقصية على $[-1,0]$ و تزايدية على $[0,1]$ و $h$ تناقصية على $\left[1,\sqrt{2}\right]$ و تزايدية على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

| | | |
|---|---|---|
| 7 | $Dp=[0;+\infty[$ ، $p(x)=f\left(\sqrt{x}\right)+1$<br>على $[0;+\infty[$ الدالة $m(x)=\sqrt{x}$ تزايدية و $m([0;+\infty[)=[0;+\infty[$<br>إذن ل $p$ نفس تغيرات $f$ على $[0;+\infty[$<br>$Dq=IR-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$ ، $q(x)=s(f(x))=s\circ f(x)$ حيث $s(x)=\dfrac{1}{x}$<br>بما أن $s$ تناقصية على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$ فإن ل $q(x)$ عكس تغيرات $f(x)$ على $Dq$ | |
| | في هذا السؤال اختصرنا طريقة الجواب لضيق الوقت. | |

**تمرين 2 :** نعتبر الدالتين $f(x)=4x^3-3x$ و $g(x)=2x^2-1$

لدينا :

$$f\circ g(x)=4(g(x))^3-3g(x)=4(2x^2-1)^3-3(2x^2-1)=4\left((2x^2)^3-3(2x^2)^2+3(2x^2)-1\right)-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=4(8x^6-12x^4+6x^2-1)-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=32x^6-48x^4+24x^2-4-6x^2+3$$

$$f\circ g(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

و

$$g\circ f(x)=2(4x^3-3x)^2-1=2(16x^6-24x^4+9x^2)-1$$

$$g\circ f(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

بالتالي : $g\circ f(x)=f\circ g(x)$ $\forall x\in IR$

**تمرين 3 :** نعتبر الدالة $f(x)=1+\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

| | |
|---|---|
| 1 | نعلم أن : $\forall x\in IR\ \ \dfrac{x}{4}\geq E\left(\dfrac{x}{4}\right)$ منه $\forall x\in IR\ \ x\geq 4E\left(\dfrac{x}{4}\right)$ منه $\forall x\in IR\ \ x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)\geq 0$ بالتالي : $Df=IR$ |
| 2 | $\forall x\in IR\ \ f(x+4)=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x+4}{4}\right)}=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x}{4}+1\right)}$<br>لدينا : $\forall x\in IR\ \ f(x+4)=1+\sqrt{x+4-4E\left[\left(\dfrac{x}{4}\right)+1\right]}=1+\sqrt{x+4-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)-4}$ بالتالي $f$ دورية أحد أدوارها 4 .<br>$\forall x\in IR\ \ f(x+4)=f(x)$ |
| 3 | لدينا : $\forall x\in IR\ \ \sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$ إذن : $\forall x\in IR\ \ f(x)\geq 1$<br>نعلم أن $\forall x\in IR\ \ \dfrac{x}{4}<E\left(\dfrac{x}{4}\right)+1$ منه : $\forall x\in IR\ \ x<4E\left(\dfrac{x}{4}\right)+4$ منه : $\forall x\in IR\ \ x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)<4$<br>منه : $\forall x\in IR\ \ \sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}<2$ منه : $\forall x\in IR\ \ f(x)<3$<br>بالتالي : $\forall x\in IR\ \ 1\leq f(x)<3$ |