| منـــارة الـــفـــردوس | فرض محروس رقم 01 | الأولـى باك علوم رياضية |
| --- | --- | --- |
| نيابة الخميسات | الدورة الأولـى : 2010/2009 | ذ : عبدالله بن لختير |

$\boxed{Durée : 02h30}$

- التمرين رقم 01: $(02pts)$

**1)**- أكتب نفي العبارة : « $p : \left(\forall x \in \mathbb{R}\right), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ » .

**2)**- باستعمال الاستدلال بالمثال المضاد ، بين أن العبارة $p$ خاطئة .

- التمرين رقم 02: $(02pts)$

← حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $(\mathrm{E}) : 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$ .

- التمرين رقم 03: $(02pts)$

لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\mathrm{P}(n) = n^2 + 7n + 12$ .

**1)**- بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), (n+3)^2 < \mathrm{P}(n) < (n+4)^2$ .

**2)**- باستعمال الاستدلال بالخلف ، بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), \sqrt{\mathrm{P}(n)} \notin \mathbb{N}$ .

- التمرين رقم 04: $(02pts)$

← بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4} > 0$ .

( يمكنك الاستدلال بفصل الحالات ، ودراسة حالة : $x \leq 0$ و $x \geq 1$ و $0 < x < 1$ ) .

- التمرين رقم 05: $(03pts)$

لتكن $a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعدادا حقيقية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثنى مثنى .

← بين أن : $ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ ، ثم إستنتج أن : $abcd < \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ .

- التمرين رقم 06: $(03pts)$

**1)**- بين أن : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(1 < x + y \leq \sqrt{2}\right)$ .

**2)**- إستنتج أن : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^{-*}\right)^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(-\sqrt{2} \leq x + y < -1\right)$ .

- التمرين رقم 07: $(03pts)$

ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$ .

**1)**- بين أنه إذا كان $n$ فرديا ، فإن $n = 4k + r$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و $r \in \{1;3\}$ .

**2)**- باستعمال الاستدلال بمضاد العكس ، بين أن : ( $n$ عدد زوجي) $\Rightarrow$ ( $n^2 - 1$ لا يقبل القسمة على 8 ) .

- التمرين رقم 08: $(03pts)$

**1)**- بين بالترجع أنه لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $n\left(n^2+5\right)$ يقبل القسمة على 6 .

**2)**- بين بالترجع أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$ .

| منـــارة الـــفــــردوس | تصحيح فرض محروس رقم 01 | الأولـى بالـك علوم رياضية |
|---|---|---|
| نيابة الخميسات | الدورة الأولـى : 2010/2009 | ذ : عبدالله بن لـختير |

- **التمرين رقم 01:**

**1)**- إذا كانت $s$ و $t$ عبارتين ، فإن : $\rceil(s \Rightarrow t) \Leftrightarrow (s$ و $\rceil t)$ .

إذن نفي العبارة : « $p : \left( (\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \right)$ » هي العبارة :

$\rceil p$ : « $(\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 \in \mathbb{Q}$ و $x \notin \mathbb{Q}$ »

**2)**- نبين أن $\rceil p$ عبارة صحيحة .

نأخذ $x = \sqrt{2}$ لدينا : $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ و نعلم أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، إذن $\rceil p$ عبارة صحيحة .

و بالتالي فإن $p$ عبارة خاطئة .

- **التمرين رقم 02:** $(02\,pts)$

← تكون المعادلة $(\mathrm{E})$ معرفة إذا كان $x \in [1;+\infty[$ و $y \in [4;+\infty[$ .

و في هذه الحالة ، لدينا :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 + \left(\sqrt{y-4}\right)^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{y-4} + 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-4} - 2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-4} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

و بالتالي ، فإن : $S = \{(2;8)\}$ .

- **التمرين رقم 03:**

لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\mathrm{P}(n) = n^2 + 7n + 12$ .

**1)**- لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$(n+4)^2 - \mathrm{P}(n) = (n^2 + 8n + 16) - (n^2 + 7n + 12)$$
$$= n + 4 \geq 4$$

و

$$\mathrm{P}(n) - (n+3)^2 = (n^2 + 7n + 12) - (n^2 + 6n + 9)$$
$$= n + 3 \geq 3$$

← إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+4)^2 > \mathrm{P}(n)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); \mathrm{P}(n) > (n+3)^2$

و بالتالي ، فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < \mathrm{P}(n) < (n+4)^2$ .

2)- نبين بالخلف أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{\mathrm{P}(n)} \notin \mathbb{N}$ .

- لنفترض أنه : $(\exists n \in \mathbb{N}), \sqrt{\mathrm{P}(n)} \in \mathbb{N}$

إذن : $(\exists a \in \mathbb{N}) / \sqrt{\mathrm{P}(n)} = a$ ، بمعنى أنه : $(\exists a \in \mathbb{N}) / \mathrm{P}(n) = a^2$

و باستعمال نتيجة السؤال 1)- نستنتج أنه : $(\exists a \in \mathbb{N}) / (n+3)^2 < a^2 < (n+4)^2$ .

و هذا تناقض ، لأنه لا يوجد مربع كامل بين المربعين المتتابعين $(n+3)^2$ و $(n+4)^2$ . إذن إفتراضنا خاطىء

و بالتالي فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{\mathrm{P}(n)} \notin \mathbb{N}$ .

- <u>التمرين رقم 04:</u>

- نبين بفصل الحالات : $x \leq 0$ و $x \geq 1$ و $0 < x < 1$ أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0 .$$

لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ، نضع : $\mathrm{P}(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$ .

- في حالة $x \leq 0$ ، لدينا :

$$x^6 + x^4 + x^2 \geq 0 \text{ و } -(x^5 + x^3 + x) \geq 0 \text{ ( لأن : } x^5 + x^3 + x \leq 0 \text{ )}$$

إذن : $x^6 + x^4 + x^2 - (x^5 + x^3 + x) \geq 0$ .

و منه فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}^-), \mathrm{P}(x) \geq \frac{3}{4}$ .

- في حالة $x \geq 1$ ، لدينا :

$$x^6 - x^5 = x^5(x-1) \geq 0 \text{ و } x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geq 0 \text{ و } x^2 - x = x(x-1) \geq 0$$

إذن : $(\forall x \in [1;+\infty[), \mathrm{P}(x) \geq \frac{3}{4}$ .

- و في حالة $0 < x < 1$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x) &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^4 - x^5\right) + \frac{1}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + x^4(1-x) + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

و بما أن : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ و $\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ و $x^4(1-x) > 0$ ، فإن : $(\forall x \in ]0;1[), \mathrm{P}(x) > \frac{1}{4}$ .

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}), \mathrm{P}(x) > \frac{1}{4}$ ، و بالتالي فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}), \mathrm{P}(x) > 0$ .

- <u>التمرين رقم 05:</u>

- لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}^{*+}$ ، لدينا :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

و بما أن $a \neq b$ ، فإن : $(a-b)^2 > 0$ . إذن : $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ .

➜ إستنتاج :

إذا كانت $a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعدادا حقيقية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثنى مثنى ، فإن :

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ و } cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 .$$

و بضرب طرفي المتفاوتتين السابقتين ، نحصل على : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}$ .

و بما أن : $(a+b)\times(c+d)\leq\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2$

فإن : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}\leq\frac{1}{4^2}\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^4$ .

و بذلك يتحقق المطلوب .

- التمرين رقم 06:

**1)**- لكل $x$ و $y$ من $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $x^2+y^2=1$ ، لدينا :

$$(x+y)^2-2=(x+y)^2-2\left(x^2+y^2\right)=-(x-y)^2\leq 0$$

إذن : $(x+y)^2\leq 2$ ، بمعنى أن : $x+y\leq\sqrt{2}$ .

➜ و من جهة أخرى :

لدينا : $\left(x^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<x<1$ و $\left(y^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<y<1$

و بما أن : $(x+y)-1=(x+y)-\left(x^2+y^2\right)=x(1-x)+y(1-y)$

فإن : $(x+y)-1>0$ .

إذن : $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2; x^2+y^2=1\Rightarrow\left(1<x+y\leq\sqrt{2}\right)$ .

**2)**- ليكن $x$ و $y$ من $\mathbb{R}^{*-}$ بحيث $x^2+y^2=1$ .

بما أن : $-x\in\mathbb{R}^{*+}$ و $-y\in\mathbb{R}^{*+}$ و $(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=1$

فإن : $1<(-x)+(-y)\leq\sqrt{2}$

إذن : $-\sqrt{2}\leq x+y<-1$ .

- التمرين رقم 07:

**1)**- ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$ و $n$ عدد فردي .

نعلم أنه يوجد $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{0;1;2;3\}$ بحيث : $n=4k+r$ .

و بما أن $n$ فردي فإن $r\notin\{0;2\}$ ( إذ لو كان $r\in\{0;2\}$ لكان $n$ زوجيا و هذا غير ممكن )

إذن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$ .

**2)**- للبرهان بمضاد العكس على أن :

( $n$ عدد زوجي ) $\Rightarrow$ ( $n^2-1$ لا يقبل القسمة على 8 )

نبين أن : ( $n^2-1$ يقبل القسمة على 8 ) $\Rightarrow$ ( $n$ عدد فردي ) .

← إذا كان $n$ عددا فرديا ، فإن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$

في حالة $r=1$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+1)^2-1=4k\times(4k+2)=8k(2k+1)$$

إذن $n^2-1$ يقبل القسمة على 8 .

و في حالة $r=3$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+3)^2-1=(4k+2)\times(4k+4)=8(k+1)(2k+1)$$

إذن $n^2-1$ يقبل القسمة على 8 .

و بالتالي ، فإن : ( $n^2-1$ يقبل القسمة على 8 ) $\Rightarrow$ ( $n$ عدد فردي ) .

- <u>التمرين رقم 08</u>:

**1)**- نبين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ .

← بالنسبة ل $n=0$ ، لدينا : $\dfrac{0\times(0^2+5)}{6}=0\in\mathbb{N}$ .

← ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$ بحيث $\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ ( إفتراض الترجع ) ، لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}&=\frac{(n+1)\left[(n^2+5)+(2n+1)\right]}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)+\left[(n^2+5)+(n+1)(2n+1)\right]}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)}{6}+\frac{3n^2+3n+6}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+1\end{aligned}$$

و بما أن : $\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$ و $\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ ( حسب إفتراض الترجع )

فإن : $\dfrac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}\in\mathbb{N}$ .

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ .

**2)**- نبين الآن بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$ .

← من أجل $n=1$ ، لدينا : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4}{5}$ و $\dfrac{4\times5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1}=\dfrac{100-96}{5}=\dfrac{4}{5}$

إذن العلاقة السابقة محققة من أجل $n=1$ .

← لنفترض أن : $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^{*}\setminus\{1\}$ .

و لنبين أن : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}=\frac{4\times5^{(n+1)+1}-(5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}$ ( ؟؟؟؟ ) .

لدينا : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}+(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

و باستعمال إفتراض الترجع ، نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}}+(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}&=\frac{5\left[4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}\right]+(n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}}\\&=\frac{4\times5^{(n+1)+1}+\left[(n+1)-5(5+n)\right]4^{n+1}}{5^{n+1}}\\&=\frac{4\times5^{(n+1)+1}-(24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}}\\&=\frac{4\times5^{(n+1)+1}-(6+n)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}\\&=\frac{4\times5^{(n+1)+1}-(5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}\end{aligned}$$

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}),\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k}=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}}$ .