فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك	مبادئ في المنطق	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز 3 ساعات

تمرين 1 : نعتبر العبارات :

(P_1): $\forall (x,y)\in IR^2 \quad x^2+y^2=1 \Rightarrow |x\,y| \leq \frac{1}{2}$

(P_2): $\exists a\in IN \ \forall x\in Q \quad x^2 > a$

(P_3): $\forall n\in IN \quad (n+n^{2013})$ *est un nombre paire*

(P_4): $\forall n\in IN^* \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

(P_5): $\forall y\in IR \ \exists x\in IR \quad x^2-yx+1=0$

1- اعط نفي كل عبارة من هذه العبارات

2- حدد حقيقة العبارتين (P_2) و (P_3) معللا جوابك

3- برهن على صحة العبارتين (P_1) و (P_4) و خطأ العبارة (P_5)

تمرين 2 :

1- برهن أن $\sqrt{2}\notin Q$ و استنتج أن : $2\sqrt{2}-\sqrt{7}\notin Q$

2- برهن أن : $\forall (x,y)\in Q^2 \quad x+y\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=y=0$

3- برهن أن: $\forall (x,y)\in IR^2 \quad x+y+1=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

4- برهن بالترجع أن: لكل $n\in IN$ $n(n^2+5)$ مضاعف للعدد 6

تمرين 3 :

1- حل في IR المعادلة: $|x^2-1|+2x-3=0$

2- حل في IR المتراجحة : $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\leq 1$

3- حل في IR^2 النظمة : $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ |x+y|=1 \end{cases}$

4- بين أن: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4 \quad \forall a>0 \quad \forall b>0$

تمرين 4 : نعتبر الحدودية : $p(x)=x^3+ax+b$ حيث : a و b عددان صحيحان نسبيان فرديان

بين أن هذه الحدودية لا تقبل جذورا جذرية

تمرين 5 :

بين أنه إذا كانت a و b و c تمثل أطوال أضلاع مثلث فإن $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{b+c}$ و $\frac{1}{c+a}$ تمثل أيضا أطوال أضلاع مثلث

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز 3 ساعات

تمرين 1 :

1

$$\neg(P_1) : \exists (x,y) \in IR^2 \quad x^2+y^2=1 \text{ و } |x\,y| > \frac{1}{2}$$

$$\neg(P_2) : \forall a \in IN \ \exists x \in Q \quad x^2 \leq a$$

$$\neg(P_3) : \exists n \in IN \quad (n+n^{2013}) \text{ est un nombre impaire}$$

$$\neg(P_4) : \exists n \in IN^* \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n}$$

$$\neg(P_5) : \exists y \in IR \ \forall x \in IR \quad x^2-yx+1 \neq 0$$

2

- بأخذنا : $x=0$ نجد أن نفي العبارة (P_2) صحيحة لأن : $\forall a \in IN \ a \geq 0 = 0^2$ ، بمعنى أن (P_2) عبارة خاطئة
- لنبين أن العبارة (P_3) صحيحة، و ذلك باستعمال البرهان بفصل الحلات.

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا :

إذا كان n عددا زوجيا فإن: n^{2013} عدد زوجي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

إذا كان n عددا فرديا فإن: n^{2013} عدد فردي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي n $n+n^{2013}$ عدد زوجي

3

- لدينا لكل $(x,y) \in IR^2$:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2|x\,y| = 1-2|xy| \Rightarrow (|x|-|y|)^2 = 1-2|x\,y| \Rightarrow 1-2|x\,y| \geq 0 \Rightarrow |x\,y| \leq \frac{1}{2}$$

بالتالي العبارة (P_1) صحيحة

- لنبرهن بالترجع على صحة العبارة (P_4)

بالنسبة لـ $n=1$ لدينا: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}=1$ و $2\sqrt{n}=2$ إذن العبارة صحيحة ($1<2$)

نفترض أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ و نبين أن : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$

لدينا:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{4n^2+4n}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{4n^2+4n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

و هذا ينهي البرهان.

- لنبرهن على خطأ العبارة (P_5) أي لنبرهن على صحة نفيها.

نعتبر المعادلة $x^2 - yx + 1 = 0$ ذات المجهول x ، لدينا : $\Delta = x^2 - 4$

إذن بأخذنا : $y = 0$ فإننا نجد أن $\Delta < 0$ أي أن هذه المعادلة ($x^2 + 1 = 0$) لا تقبل حلولا في IR

بمعنى : $\forall x \in IR \quad x^2 + 1 \neq 0$ مما يؤكد صحة نفي العبارة (P_5)، بالتالي فـ (P_5) عبارة خاطئة.

تمرين 2 :

1

نفترض أن: $\sqrt{2} \in Q$: إذن $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \quad \exists (a,b) \in IN \times IN^*$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \ un\ nombre\ paire \Rightarrow a\, un\ nombre\ paire$$

منه:

$$\Rightarrow \exists k \in IN / a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \ un\ nombre\ paire \Rightarrow b\, un\ nombre\ paire$$

نستنتج إذن أن 2 قاسم مشترك لـ a و b وهذا يناقض $a \wedge b = 1$

إذن الافتراض خاطئ و منه: $\sqrt{2} \notin Q$

نضع: $\alpha = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ نفترض أن: $\alpha \in Q$ ، منه: $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases} \quad \exists (a,b) \in IN \times IN^*$

لدينا: $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{7}}{8 - 7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$

منه: $\dfrac{1}{\alpha} + \alpha = 4\sqrt{2}$ منه: $\dfrac{1}{4\alpha} + \dfrac{\alpha}{4} = \sqrt{2}$ منه: $\dfrac{b}{4a} + \dfrac{a}{4b} = \sqrt{2}$ منه : $\dfrac{b^2 + a^2}{4ab} = \sqrt{2}$ منه $\sqrt{2} \in Q$

وهذا غير ممكن حسب النتيجة السابقة.

2

لدينا لكل $(x, y) \in Q^2$

- من جهة : $x = y = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2} = 0$
- و من جهة أخرى نبين أن: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

لدينا: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -y\sqrt{2}$

نستنتج إذن أن : x و y منعدمان معا أو غير منعدمين معا

إذا افترضنا أنهما غير منعدمين معا فسنستنتج أن : $\sqrt{2} = \dfrac{-x}{y}$ وبما أن خارج عددين جذريين غير منعدمين هو عدد جذري ، فسنستنتج أن : $\sqrt{2} \in Q$ وهذا غير ممكن حسب السؤال السابق

إذن نستنتج أن x و y منعدمان معا، منه: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

3

لدينا، لكل $(x,y)\in IR^2$:

$$x+y+1=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}\right) \Rightarrow x+y+1=2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1} \Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y-1}=0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+y-1-2\sqrt{y-1}+1=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{y-1}-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

4

بالنسبة لـ $n=0$ العبارة المطلوبة صحيحة لأن 0 مضاعف للعدد 6

نفترض أن $n\left(n^2+5\right)$ مضاعف لـ 6 ونبرهن أن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6

لدينا: $n\left(n^2+5\right)$ مضاعف لـ 6، إذن: $\exists k\in IN \ / \ n\left(n^2+5\right)=6k$

ولدينا:

$$(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=(n+1)\left(n^2+2n+6\right)=n^3+2n^2+6n+n^2+2n+6=n^3+3n^2+8n+6$$

$$=n^3+5n+3n^2+3n+6=6k+3n(n+1)+6$$

وبما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي) فإن: $\exists p\in IN \ / \ n(n+1)=2p$

منه: $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=6k+6p+6=6(k+p+1)$

وبما أن: $k+p+1\in IN$ فإن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6

تمرين 3 :

1

في المجال : $I=[-1;1]$ لدينا: $x^2-1\leq 0$

ومنه: $\left|x^2-1\right|+2x-3=0 \Leftrightarrow 1-x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$

وبما أن: $\Delta=4-8=-4<0$ فإن: $S_1=\phi$

وفي المجال : $J=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $x^2-1>0$

ومنه: $\left|x^2-1\right|+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-1+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0$

وبما أن: $\Delta=4+16=20$ فإن: $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}\in J$ و $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}\in J$

$S_2=\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\right\}$، خلاصة: $S=S_1\cup S_2=\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\right\}$

2

$$D=\{x\in IR \ / \ 3x-6\geq 0 \ et \ \ x-1\geq 0\}=\{x\in IR \ / \ x\geq 2 \ et \ \ x\geq 1\}=[2;+\infty[$$

إذن لكل $x\in[2;+\infty[$ لدينا:

$$\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-6}\leq 1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{3x-6}^{\,2}\leq\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow 3x-6\leq 1+2\sqrt{x-1}+x-1$$

$$\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\leq 1 \Leftrightarrow 2x-6\leq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-3\leq\sqrt{x-1}$$

إذا كان : $x-3\leq 0$ أي $2\leq x\leq 3$ فالمتراجحة صحيحة ، منه: $S_1=[2;3]$

إذا كان $x-3>0$ فإن: $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\leq 1 \Leftrightarrow x^2-6x+9\leq x-1 \Leftrightarrow x^2-7x+10\leq 0$

$\Delta=49-40=9$ ، بعد إنشاء جدول الإشارات نجد أن: $S_2=[2;5]\cap]3;+\infty[=]3;5]$

خلاصة: $S=S_1\cup S_2=[2;5]$

3

لدينا:

$$\begin{cases}2x+3y=-1\\ |x+y|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=1 \ \ ou \ \ x-y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=1\end{cases} \ ou \ \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=-1\end{cases}$$

وباستعمال المحددة أو طريقة التعويض أو التأليفة الخطية نجد:

$$\begin{cases}2x+3y=-1\\ |x+y|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-3\end{cases} \ ou \ \begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$$

بالتالي: $S=\{(4;3\,);(-2;1)\}$

4

لدينا:

$$\forall a>0\ \ \forall b>0\ \ \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)-4=ab+1+1+\frac{1}{ab}-4=ab-2+\frac{1}{ab}=\frac{(ab)^2-2ab+1}{ab}=\frac{(ab-1)^2}{ab}\geq 0$$

بالتالي: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4 \quad \forall a>0 \quad \forall b>0$

<u>تمرين 4</u> : نفترض أن الحدودية : $p(x)=x^3+ax+b$ تقبل على الأقل حلا جذريا

إذن: $\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)^3+a\left(\frac{p}{q}\right)+b=0\\ p\wedge q=1\end{cases}\ /\ \exists(p,q)\in Z\times IN^*$ منه: $p^3+apq^2+bq^3=0$

بما أن : $p\wedge q=1$ فإن p و q فرديان معا أو أحدهما فري و الأخر زوجي

إذا كانا فرديان معا فإن: p^3 و apq^2 و bq^3 أعداد فردية مجموعها فردي

إذا كان أحدهما زوجي و الآخر فردي (و بدراسة الحالتين معا) نجد أن apq^2 عدد زوجي و p^3+bq^3 عدد فردي

في كل الحلات نجد أن $p^3+apq^2+bq^3$ عدد فردي و هذا غير ممكن لأن الصفر عدد زوجي

<u>تمرين 5</u> :

لدينا a و b و c تمثل أطوال أضلاع مثلث إذن: $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $a+b>c$ و $a+c>b$ و $b+c>a$

منه : $\frac{1}{a+b}>0$ و $\frac{1}{b+c}>0$ و $\frac{1}{c+a}>0$

و $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{b+c+b+c}\geq\frac{2}{2(b+c)}\geq\frac{1}{b+c}$

لأن: $a+b<a+b+c$ و $a+c<a+b+c$ و $a<b+c$ (

و بنفس الطريقة نبين أن: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b}$ ، و هذا ينهي البرهان.

- هذا الفرض المقترح يتضمن تمارين أكثر من التمارين المفترضة في فرض فعلي كما و كيفا(من حيث الصعوبة)، لذلك اقترحت 3 ساعات كوقت افتراضي لإنجازه، الهدف من ذلك التعود على مثل هذه الوضعيات و أيضا محاولة الإحاطة بجل مفاهيم الدرس الواجب الالمام بها.
- عدم التمكن من إنجاز بعض أو جل هذه التمارين لا يعني مطلقا ضعفا أو نقصا في المستوى لكنه يعني ضرورة تكثيف الجهد و استثمار الحلول المقترحة في حل وضعيات مشابهة.