

Exercice1 : (3,5 points)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ (2)
2. On considère l'équation (E) : $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$
 - a- Montrer que (E) admet deux solutions (0,5)
 - b- Vérifier que 1 est solution de l'équation (E) (0,5)
 - c- Sans résoudre l'équation (E) déterminer la deuxième solution (0,5)

Exercice2 : (6 points)

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes : (4x0,75)

P : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (1 - \sqrt{2}) - x \leq 0$

Q : $(\exists x \in \mathbb{R}^+) x^2 + 4x + 3 = 0$

R : $(\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{4+1})$ et $(\sqrt{(-2)^2} = 2)$

T : $(\sqrt{3} \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3 < 4,1)$
2. Donner la négation des propositions suivantes : (3x0,75)

E : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 - y = 0$ et $y \geq x$

F : $(\forall x \in \mathbb{R}) x \leq 0$ ou $x > 0$

G : $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$
3. En utilisant le tableau de vérité montrer que la proposition suivante est une loi logique $[(A \Rightarrow B) \text{ et } (\bar{A} \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ (0,75)

Exercice3 : (10,5 points)

1. En utilisant les équivalences successives montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$ (2)
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 [x \neq y \text{ et } x+y \neq 1] \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1} \neq \sqrt{y^2-y+1}$ (2)
3. Montrer que la proposition suivante est vraie :
 $[\sqrt{3} + \sqrt{2} \leq \sqrt{5}] \Rightarrow [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \leq 5]$ (2)
4. En utilisant la disjonction des cas montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ (2)
5. Montrer par récurrence que :
 $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (2+0,5)
Déduire la valeur de la somme $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9$
On rappelle que $2^{10} = 1024$