فرض محروس رقم 3

ثانوية محمد الخامس التأهيلية	السنة الثانية شعبة العلوم الرياضية أ – ب	بتاريخ : 4 ماي 2016
المادة : رياضيات	المدة : ساعتان و نصف	المعامل : 9

سلم التنقيط

تمرين في الاحتمالات (5نقط)

صندوق يحتوي على أربع كرات سوداء و ثلاث كرات بيضاء.
نقوم بالتجربة التالية:
نسحب كرة من الصندوق - إذا كانت سوداء نرجعها إلى الصندوق و نسحب تآنيا كرتين من هذا الصندوق .
- إذا كانت بيضاء نضعها جانبا و نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من هذا الصندوق.

0.5 ن — 1) بين أن عدد الامكانيات المرتبطة بهذه التجربة هو 174 .

0.5 ن — 2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{47}{245}$.

0.5 ن — 3) علما أن الكرات الثلاث من نفس اللون ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة في السحبة الاولى بيضاء؟

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء التي بقيت في الصندوق بعد انتهاء التجربة.

0.5 ن — أ) حدد القيم الممكنة ل X .

1 ن — ب) بين أن $p(X=1)=\frac{76}{245}$ و أن $p(X=2)=\frac{122}{245}$.

1.5 ن — ج) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي

0.5 ن — 5) نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات مع إعادة الكرات المسحوبة إلى الصندوق في كل مرة.
ما هو الاحتمال لكي نحصل على ثلاث كرات من نفس اللون مرتين بالضبط؟ أعط النتيجة بإفراط إلى $0,01$.

مسألة في التحليل (15 نقطة)

I) لتكن u الدالة العددية المعرفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$ ب :
$$\begin{cases} u(x)=\dfrac{1}{\ln(x)} ; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ u(0)=0 \end{cases}$$

0.5 ن — 1) أ) أدرس اتصال و اشتقاق الدالة u على اليمين في 0 .

1 ن — ب) احسب نهايات الدالة u و حدد الفروع اللانهائية للمنحنى C_u .

1 ن — ج) أدرس تغيرات الدالة u ثم ضع جدول تغيراتها.

1.5ن — 2) أ) بين أن $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[);\frac{x^2-x}{2\ln(x)}\leq\int_x^{x^2}u(t)dt\leq\frac{x^2-x}{\ln(x)}$.(قم بفصل حالتين).

1ن — ب) نضع $\varphi(x)=\int_x^{x^2}u(t)dt$.

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)}{x}$

II) لتكن v الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب :
$$\begin{cases} v(x)=(x-1)u(x) ; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ v(0)=0 ; v(1)=1 \end{cases}$$

1 ن — 1) أ) بين أن الدالة v متصلة على $[0,+\infty[$.

0.5 ن — ب) أدرس قابلة اشتقاق الدالة v على اليمين في 0و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

فرض محروس رقم 3

2) أ) بين أن $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); v'(x)=\dfrac{1-x+x\ln(x)}{x\ln^2(x)}$	0.25 ن
ب) بين أن $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); x\ln(x)>x-1$	0.5 ن
ج) ضع جدول تغيرات الدالة v وأنشئ منحناها C_v في معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن v قابلة للاشتقاق في 1 و ان $v'(1)=\dfrac{1}{2}$)	1 ن
3) بين أن: $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); \mathrm{x}-1\le \int_x^{x^2}\dfrac{v(t)}{t}dt\le\dfrac{x^2-1}{2}$. (قم بفصل حالتين)	1.5 ن
III) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب: $\begin{cases} f(x)=\ln(1+x)-\int_x^{x^2}u(t)\,dt; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}$	
1) أ) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (استعمل السؤال 2) ب) من I)	0.5 ن
ب) أدرس الفرع اللانهائي ل C_f	0.5 ن
2) أ) بين أن $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-\int_x^{x^2}\dfrac{v(t)}{t}dt$.	0.5 ن
ب) بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في 1 .(استعمل السؤال 3) من II)	1 ن
ج) استنتج أن $\lim\limits_{x\to1}\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}dt=\ln 2$	0.25 ن
3) أ) بين أن : $\exists\alpha\in]0,1[; f'(\alpha)=0$.	0.25 ن
ب) بين أن $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right); f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-v(x)$.	0.25 ن
4) أ) بين أن الدالة f' تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم استنتج اشارتها.	0.75 ن
ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.25 ن
IV) لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{x+1}e^{\int_x^{x^2}u(t)dt}; x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ F(0)=F(1)=1\end{cases}$	
1) تحقق أن $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right); F(x)=e^{-f(x)}$	0.5 ن
2) حدد الفرع اللانهائي ل C_F	0.25 ن
3) ضع جدول تغيرات الدالة F	0.5 ن

إنتهى