التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $\frac{1}{2}Z^3-(1+i)Z^2+2(1+i)Z-4i=0 \quad (E)$

1) أ- تحقق أن العدد $Z_0=2i$ حلا للمعادلة (E)

ب- حدد الأعداد β , α بحيث يكون :

$(E) \Leftrightarrow (Z-2i)\left(\frac{1}{2}Z^2+\alpha Z+\beta\right)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) في المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A(1+i\sqrt{3})$ ، $B(1-i\sqrt{3})$ و $C(2i)$

أ- أحسب $\frac{z_C}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAC محددا قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)$

ب- حدد d لحق النقطة D منتصف القطعة $[AC]$ و بين أن $\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

3) نعتبر الدورانين $R_1\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)$ و $R_2\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ و نضع $O'=R_1(O)$ ، $B'=R_2(B)$

أ- حدد $Z_{O'}$ لحق O' و بين أن لحق النقطة B' هو $b'=1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

ب- لتكن I منتصف القطعة $[OB]$ بين أن (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني

ليكن p عددا أوليا أكبر من 3 و a عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث $a^2+1\equiv 0\ [p]$

1) أ- بين أن $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$

ب- استنتج أن $p\equiv 1\ [4]$

2) لتكن A مجموعة الأعداد الأولية و التي تكتب على الشكل $4k+1$.

نفترض أن A مجموعة منتهية و نضع $n=\left(2\prod_{p_k\in A}p_k\right)^2+1$

أ- بين أن العدد 3 لا يقسم العدد n (بتطبيق مبرهنة فيرما)

ب- بين أنه إذا كان p عددا أوليا يقسم العدد n فإن $p\equiv 1\ [4]$

ج- استنتج أن المجموعة A غير منتهية

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 3$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x-n\ln x$

1) أ- أحسب النهايات التالية $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}f_n(x)$

ب- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و وضع جدول تغيرات الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين U_n و V_n بحيث $o<U_n<n<V_n$

3) أ- بين أن $(\forall n\geq 3)\quad 1<U_n<e$

ب- تحقق أن $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$ و استنتج أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

ج- بين أن $e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}}\quad(\forall n\geq 3)$ و أستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$ و بين أن $\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$

5) أ- بين أن $V_n>n\ln n\quad(\forall n\geq 3)$

ب- بين أن $f_n(n^2)=nf_2(n)\quad(\forall n\geq 3)$ و استنتج أن $V_n<n^2\quad(\forall n\geq 3)$

(يمكن استعمال رتابة f_2 و نعطي $f_2(3)>0$)

ج- استنتج أن $V_n\leq 2n\ln n\quad(\forall n\geq 3)$

د- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n\ln n}=1$

المادة : الرياضيات
الشعبة : 2 علوم رياضية

الموضوع : تصحيح الفرض رقم 2 الدورة II

الأستاذ : الماتشي

التمرين الأول : الأعداد العقدية

1 - أ - لدينا :

$(E)\ \frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0$

و $z_0=2i$

نتحقق أن z_0 حل للمعادلة (E)

$\frac{1}{2}(z_0)^3-(1+i)z_0^2+2(1+i)z_0-4i$

$=\frac{1}{2}(2i)^3-(1+i)(2i)^2+2(1+i)2i-4i$

$=-4i+4(1+i)+4i(1+i)-4i$

$=-4i+4+4i+4i-4-4i$

$=0$

وعليه z_0 حل للمعادلة (E)

ب - لدينا : $(z-2i)(\frac{1}{2}z^2+\alpha z+\beta)$

$=\frac{1}{2}z^3+(\alpha-i)z^2+(\beta-2i\alpha)z-2i\beta$

$\begin{cases}\alpha-i=-1-i\\ \beta-2i\alpha=2+2i\\ -2i\beta=-4i\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$

وعليه (E) تصبح :

$z=2i$ أو $\frac{1}{2}z^2-z+2=0$

$\Delta=-3$

اذن للمعادلة $\frac{1}{2}z^2-z+2$ حلين :

$z_1=1-i\sqrt{3}$

$z_2=1+i\sqrt{3}$

وعليه :

$S_E=\{2i,\ 1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3}\}$

2) أ - لدينا :

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}$

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

و $\left|\frac{z_C}{z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

اذن : $OA=OC$ و $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

أي : $(\overline{OA},\overline{OC})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi],\ OA=OC$

⇐ OAC متساوي الساقين في O

و $(\overline{OA},\overline{OC})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

ب - لحق D منتصف (AC) هو :

$d=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i$

D منتصف $[AC]$ و OAC متساوي الساقين

$(\overline{OD},\overline{OC})\equiv\frac{1}{2}(\overline{OA},\overline{OC})\,[2\pi]$

$(\overline{OD},\overline{OC})\equiv\frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

$\arg(d)\equiv(\overline{u},\overline{OD})\,[2\pi]$

$\equiv(\overline{u},\overline{OC})+(\overline{OC},\overline{OD})\,[2\pi]$

$\equiv\arg c-\frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

ج - قيمة : $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{Re(d)}{|d|}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{Im(d)}{|d|}$

لدينا $|d|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

3) أ- لدينا: $o' = R_1(A, \frac{-\pi}{2})$

اذن: $z_{o'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_o - z_A)$

$z_{o'} = -i(-z_A) + z_A$

منه: $z_{o'} = i(1+i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$

وعليه: $z_{o'} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

لدينا: $B' = R_2(A, \frac{\pi}{2})$

$b' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$b' = i(1-i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$

وعليه: $b' = (2\sqrt{3}+1) + i\sqrt{3}$

د- I منتصف $[OB]$ اذن: لدينا:

$z_I = \frac{z_o + z_B}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\frac{z_A - z_I}{z_{o'} - z_{B'}}$

اذن: $= \frac{1+i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}}$

منه: $= \frac{\frac{i}{2}(3\sqrt{3}-i)}{3\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}$

وعليه: $(o'B') \perp (AI)$

منه: (AI) ارتفاع للمثلث $Ao'B'$

التمرين الثاني: الحسابيات

1) أ- $a^2 + 1 \equiv 0[p]$

$(\exists k \in \mathbb{R})\ a^2+1 = kp$

$pk - a \times a = 1$

وحسب بوزو فإن: $a \wedge p = 1$

و p أولي . حسب فيرما فإن:

$a^p \equiv a[p]$

$p / a(a^{p-1} - 1)$

لكن $p \wedge a = 1$ فإن:

$p / a^{p-1} - 1$

وعليه $a^{p-1} \equiv 1[p]$

ب) لكل عدد x من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$x \equiv 0[4]$ $\quad x \equiv 1[4]$

$x \equiv 2[4]$ $\quad x \equiv 3[4]$

لدينا $x \equiv 0[4] \Leftrightarrow 4/x$

$x \equiv 2[4] \Leftrightarrow$ x زوجي

بما أن p أولي فإن:

$p \equiv 1[4]$ أو $p \equiv 3[p]$

نفترض أن: $p \equiv 3[4]$

اذن: $p = 4k+3$

وحسب ماسبق $a^{p-1} \equiv 1[p]$

(1) $a^{4k+2} \equiv 1[p]$

ومن جهة لدينا: $a^2 \equiv -1[p]$

(2) $(a^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$

من (1) و(2) لدينا: $1 \equiv -1[p]$

وهذا غير صحيح لأن $p \geq 3$

وبالتالي فإن: $p \equiv 1[4]$

ج) 2- لدينا: $3 \notin A$ (لأن $3 \not\equiv 1[4]$)

$\Leftarrow (\forall p_k \in A)\ 3\wedge(p_k) = 1$

$3 \wedge (\prod_{p_k \in A} p_k) = 1$

ولدينا: $3 \wedge 2 = 1$

$3 \wedge (2\prod_{p_k \in A} p_k) = 1 \Leftarrow$

وعليه حسب فيرما فإن:

$(2\prod_{p_k \in A} p_k)^{3-1} \equiv 1[3]$

$(2(\prod_{p_k \in A} p_k))^2 \equiv 1[3]$

ومنه $n \equiv 2[3]$

$\Leftarrow$ 3 لا يقسم n.

ب- ليكن p أولي و p/n

لدينا $p \neq 3$ لأن 3 لا يقسم n

$$n \equiv 0 [p]$$

$$a^2+1 \equiv 0 [p]$$

$$\left(a = 2\prod p_k\right)$$

وحسب نتيجة السؤال (1) فإن:

$$p \equiv 1 [4]$$

ج) نفترض أن المجموعة A منتهية

ونضع: $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$

ونعتبر العدد $n = \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2+1$

لدينا: $n \neq p_1, p_2, \ldots, p_m$

لنتحقق أن: "p_k لا يقسم n"

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\}$$

نفترض أن: p_k / n

ولدينا: $p_k / 2\prod_{j=1}^{m} p_j$

$$p_k/n \quad \text{و} \quad p_k / \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2$$

وعليه $p_k/1$ ، لا يمكن

$\Leftarrow$ p_k لا يقسم n.

نفترض أن n غير أولي

$\Leftarrow$ n يقبل قاسم أولي p

وحسب ما سبق فإن $p \equiv 1 [4]$

إذن $p \in A$ $\Leftarrow$ تناقض

$\Leftarrow$ n أولي و $n = 4\left(\prod_{j=1}^{m} p_j\right)+1$

أي $n \in A$ ، يتناقض مع A منتهية.

إذن: المجموعة A غير منتهية.

التمرين 3: دراسة دالة.

1) $f_n(x) = x - n\ln x \quad \forall x \in]0,+\infty[$

أ- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - n\ln x$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن:

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} x - n\ln x = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$$

نعلم أن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن: $\lim_{x\to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1$

وعليه: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- $f_n'(x) = (x - n\ln x)' = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

إذن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x-n$

x	0	n	$+\infty$
f_n	$+\infty$ ↘	$n(1-\ln n)$	↗ $+\infty$

2) لتكن: $g = f_n|_{]0,n]}$ قصور f_n على $]0,n]$

g متصلة وتناقصية قطعا على $]0,n]$

$\Leftarrow$ g تقابل من $]0,n]$ نحو $[n(1-\ln n),+\infty[$

نعلم أن: $n \geq 3 > e$ فإن: $\ln n > 1$

أي أن: $n(1-\ln n) < 0$

$$0 \in [n(1-\ln n),+\infty[$$

وعليه: $(\exists! u_n \in]0,n])$ $g(u_n) = 0$

$(\exists! u_n \in]0,n])$ $f_n(u_n) = 0$

ولتكن $h = f_n|_{]n,+\infty[}$ قصور f_n على $]n,+\infty[$

h متصلة وتزايدية قطعا على $]n,+\infty[$

h تقابل من $]n,+\infty[$ نحو $]\ln(1-\ln n),+\infty[$

وبما أن: $0\in]\ln(1-\ln n),+\infty[$

فإن: $(\exists! V_n\in]n,+\infty[)\ h(V_n)=0$

$(\exists! V_n\in]n,+\infty[)\ f_n(V_n)=0$

3) أ- لدينا U_n هو حل للمعادلة $f_n(x)=0$

على المجال $]0,n[$ و e و 1 ينتميان

إلى $]0,n[$. مع $f_n(1)=1>0$

$f_n(e)=e-n<0$ $(n\geq 3>e)$

منه

$f_n(e)<0<f_n(1)$

أي $f_n(e)<f_n(U_n)<f_n(1)$

و f_n تناقصية على $]0,n[$

إذن: $(\forall n\geq 3)\ 1<U_n<e$

ب- لدينا: $f_n(U_{n+1})=U_{n+1}-n\ln(U_{n+1})$

$=U_{n+1}-(n+1)\ln U_{n+1}+\ln(U_{n+1})$

$=f_{n+1}(U_{n+1})+\ln(U_{n+1})$

(لأن $f_n(U_n)=0$)

منه: $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$

⇐ استنتاج:

لدينا $\ln(U_{n+1})>0 \Leftarrow U_{n+1}>1$

أي $f_n(U_{n+1})>0=f_n(U_n)$

U_n و U_{n+1} ينتميان لـ $]1,e[$

وبما أن f_n تناقصية على

$]1,e[\subset]0,n[$

فإن: $U_{n+1}<U_n$

$\Leftarrow (U_n)_{n\geq 3}$ تناقصية.

ج- $U_n=n\ln U_n \Leftarrow f_n(U_n)=0$

بما أن: $1<U_n<e<3$

فإن: $1<n\ln U_n<3$

أي $\frac{1}{n}<\ln(U_n)<\frac{3}{n}$

منه $(\forall n\geq 3)\ e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}}$

4) لدينا: $V_n>n$ $(\forall n\geq 3)$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

⇐ لدينا: $f_n(V_n)=0$

يعني أن $V_n=n\ln(V_n) \Leftrightarrow \ln V_n=\ln n+\ln(\ln V_n)$

وعليه $\frac{\ln V_n}{\ln n}=1+\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}$

⇐ $\frac{\ln V_n}{\ln n}-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}=1$

وعليه $\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$

⇐ تحديد: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$

لدينا: $\frac{\ln V_n}{\ln n}=\frac{1}{1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(V_n)=+\infty$

منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}=0$

وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}=1$

5) أ- لدينا: $f_n(V_n)=0 \Leftrightarrow V_n=n\ln V_n$

بما أن: $\ln V_n>\ln n \Leftarrow V_n>n$

فإن: $n\ln(V_n)>n\ln n$

إذن: $(\forall n\geq 3)\ V_n>n\ln n$

من انجاز التلميذة: سناء العلمي

$+/5$

ب- لدينا:
$$f_n(n^2) = n^2 - n\ln(n^2)$$
$$= n^2 - 2n\ln n$$
$$= n(n - 2\ln n)$$
$$f_n(n^2) = n f_2(n) \quad (\forall n \geq 3)$$
- استنتاج:

$f_2(x) = x - 2\ln x \Leftarrow f_2'(x) = \frac{x-2}{x}$

f_2 تزايدية على $[2,+\infty[$

بما أن: $n \geq 3$ فإن $f_2(n) \geq f_2(3)$

ومنه $f_2(n^2) > 0 = f_n(V_n)$

ولدينا V_n و n^2 من $]n,+\infty[$

و f_n تزايدية على $]n,+\infty[$

اذن: $n^2 > V_n \quad (\forall n \geq 3)$

ج- لدينا $V_n = n\ln(V_n)$ معناه $f(V_n) = 0$

وبما أن: $n^2 > V_n$ فإن: $2\ln(n) > \ln(V_n)$

أي أن: $2n\ln n > n\ln V_n$

ومنه $V_n \leq 2n\ln n \quad (\forall n \geq 3)$

د- لدينا:
$$\frac{V_n}{n\ln n} = \frac{n\ln V_n}{n\ln n} = \frac{\ln V_n}{\ln n}$$
(اذن: $V_n = n\ln(V_n)$)

لدينا: $n\ln(n) < V_n < 2n\ln n$
$$\ln n + \ln(\ln n) < \ln V_n < \ln(n) + \ln(2\ln(n))$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1 + \frac{\ln(2\ln n)}{\ln n}$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{V_n}{n\ln n} < 1 + \frac{2\ln(2\ln n)}{2\ln n}$$
بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim \frac{\ln(2\ln n)}{2\ln n} = 0$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{n\ln n} = 1$

من إنجاز التلميذة: سناء العـ... ع
ص-ع-ر-ع.