| الثانية بكالوريا ع ر | فرض محروس | 2015-14 |
|---|---|---|

## التمرين الأول :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بما يلي : $V_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2}$ و $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) بين أن $\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{1}{2}$

2) بين أن $\sum_{k=1}^{k=n}k^3\leq n^4$ $(\forall n\geq 1)$

3) أ- بين أن $t-\frac{t^3}{6}\leq \sin t\leq t$ $(\forall t>0)$

ب- بين أن $V_n-\frac{1}{6n^2}\leq U_n\leq V_n$ : $(\forall n\geq 1)$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

## التمرين الثاني :

ليكن $n$ عددا طبيعيا بحيث $n\geq 2$ . نعتبر الدالة $f_n$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x^n-nx+1$

1) أ- أدرس رتابة الدالة $f_n$ و أنجز جدول تغيرات الدالة $f_n$

ب- بين أن لكل $n\geq 3$ المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين $u_n$ و $v_n$ حيث أن $0<u_n<1<v_n$

2) أ- بين أن $f_n\left(\frac{2}{n}\right)<0$ $(\forall n\geq 3)$

ب- استنتج أن $u_n<\frac{2}{n}$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim_{n\to+\infty}nu_n$

3) أ- بين أن $(1+a)^n\geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$ $(\forall a>0)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $f_n\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)>0$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to+\infty}v_n=1$

## التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=\frac{1-x}{2(x^2+1)}$

1) أ- بين أن $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}$ و بين أن الدالة $f$ تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

ب- بين أن $|f'(x)|\leq\frac{7}{8}$ $\left(\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$

ج- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ حلا وحيدا $\alpha$

2) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_0=\frac{1}{4}$ و $V_{n+1}=f(V_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $0\leq V_n\leq\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $|V_{n+1}-\alpha|\leq\frac{7}{8}|V_n-\alpha|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- بين أن $|V_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها