الثانية علوم رياضية	فرض رقم 3	2015-14

التمرين الأول

نضع $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) بين أن $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq 2\left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)$ $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$

2) إستنتج أن $S_n \geq 2\sqrt{n+1}-2$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} S_n$

3) بين بالترجع أن $S_n \leq \sqrt{n}+\sqrt{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و إستنتج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثاني

[I 1) نعتبر الدالة g المعرفة على $x \in]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{-1}{x+1} + 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

أ- أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أحسب المشتقة $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

2) نضع $v(x) = \frac{x^3}{3}$ و $u(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

بين أن $0 \leq \frac{1}{1+x} - 1 + x \leq x^2$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ثم استنتج أن $0 \leq u(x) \leq v(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ (α)

[II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $x \neq 0$; $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

2) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أدرس أن المستقيم $y = x - \frac{1}{2}$ (D) مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ (يمكن استعمال (α))

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى C_f

التمرين الثالث

نضع $f(z) = \frac{1}{\bar{z}+i}$ لكل عدد عقدي z يخالف i .

1) أنشر العدد $(1+i\sqrt{3})^2$ ثم حدد حلول المعادلة $f(z) = \sqrt{3} - \bar{z}$

2) أ- حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقي

ب- نضع $z = iy$ مع $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ حدد المجموعة $(E) = \{M(f(z)) / y \in \mathbb{R} - \{1\}\}$

ج- نفترض أن $z = x$ و $x \in \mathbb{R}$.

بين ان $f(z) + \frac{i}{2} = \frac{i(x-i)}{2(x+i)}$ ثم استنتج أن $(C) = \{M(f(z)) / x \in \mathbb{R}\}$ هي دائرة محددا عناصرها

3) بين أنه إذا كان $|z| = 1$ فإن $\mathrm{Im}(f(z)) = -\frac{1}{2}$