الثانية بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لحتير	الدورة الأولى: 2009/2008	نيابة الخميسات

Durée : 03h

- **التمرين الأول:** (نقطتان)

لمزيد من دروس التمارين الامتحانات ... موقع قلمي

لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي : $S_n = \frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+...+\frac{3n-2}{5^n}$.

1)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ S_{n+1} = \frac{1}{5}+\frac{S_n}{5}+\frac{3}{20}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$.

2)- بين بالترجع أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

3)- إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و حدد نهايتها .

- **التمرين الثاني:** (**04** نقط)

I- لتكن $(a_n)_{n\geq 2}$ و $(b_n)_{n\geq 2}$ المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$a_n = \cos\frac{\pi}{2^2}\times\cos\frac{\pi}{2^3}\times...\times\cos\frac{\pi}{2^n} \quad \text{و} \quad b_n = a_n\times\cos\frac{\pi}{2^n} .$$

1)- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ محدودة و رتيبة .

2)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ \cos^2 x-\cos(2x)\geq 0$.

3)- بين أن المتتالية $(b_n)_{n\geq 2}$ تزايدية .

4)- بين أن المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 2}$ و $(b_n)_{n\geq 2}$ متحاديتان . ماذا تستنتج ؟

II- مهما يكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$ ، نضع : $c_n = a_n\times\sin\frac{\pi}{2^n}$.

1)- بين أن $(c_n)_{n\geq 2}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

2)- إستنتج النهاية المشتركة L للمتتاليتين $(a_n)_{n\geq 2}$ و $(b_n)_{n\geq 2}$.

3)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R});\ |1-\cos x| \leq \frac{x^2}{2}$.

4)- إستنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ ، لدينا : $0 \leq a_n - L \leq \frac{\pi^2}{2^{2n+1}}$.

- **<u>التمرين الثالث</u>:**

I- لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم (حيث الوحدة هي $4cm$) .

1)- بين أن (C_f) متماثل بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2)- أدرس قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

3)- بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ ، ثم ضع جدول التغيرات .

4)- أدرس إشارة $f(x)-x$ على المجال $[0;1]$ ، ثم أنشىء المنحنى (C_f) .

II- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

1)- تحقق من أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالفعل .

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون ثابتة إذا و فقط إذا كان : $u_0 \in \left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$.

3)- نفترض أن : $u_0 \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$.

أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

4)- نفترض أن : $u_0 \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

- **التمرين الرابع: (03 نقط)**

I- نعتبر الدالة : $f : x \mapsto \dfrac{x^4+5x^3+1}{x^4+1}$.

1)- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي :

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ \left(\forall x\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);\ g(x)=f(\tan x) \end{cases}.$$

أ- بين أن الدالة g تحقق شروط مبرهنة رول على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

ب- بين أنه : $\left(\exists c\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)/\ g'(c)=0$.

ج- إستنتج أنه : $(\exists \alpha\in \mathbb{R})/\ f'(\alpha)=0$.

II- لتكن h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث :

h تقبل عند $+\infty$ و $-\infty$ نهايتين منتهيتين و متساويتان ($\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)<\infty$) .

بين أن المعادلة $(E): h'(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

- **التمرين الخامس: (06 نقط)**

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $f(x)=x+\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1)- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أدرس قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ و أن : $\left(\forall x\in \mathbb{R}^{+*}\right);\ f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$.

4)- إستنتج رتابة f ، ثم ضع جدول تغيراتها .

5)- بين أن المشتقة f' تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$.

6)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) ، ثم أنشىء (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال I ينبغي تحديده .

8)- أنشىء المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

II- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a / a \in \mathbb{R}^{+*} \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases} .$$

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 0$.

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .

3)- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، أثبت أنه : $(\exists k \in]0;1[) / \ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} \leq k u_n$.

4)- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

- **ملحوظة: تخصص نقطتان إضافيتان لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .**