

التمرين الأول

(I) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

(II) المسوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \bar{u}, \bar{v}) نعتبر النقطتين B ; D اللتين

لحفاهما على التوالي $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_D = \sqrt{3} - i$ وليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(1) حدد الرمز الأسّي للعدد z_B و بين أن OBD مثلث متساوي الأضلاع

(2) نعتبر النقطة E ذات اللوح $Z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ وليكن z_A لحق النقطة A صورة النقطة E بالدوران R

بين أن $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و استنتج أن A منتصف $[OB]$

(3) أ- أثبت أن $z_C = \frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هو لحق النقطة C صورة النقطة E بالإزاحة T التي متجهتها $2\bar{v}$

ب- بين أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = (\sqrt{3} - 1)i$ و استنتج أن (CD) واسط القطعة $[OB]$

التمرين الثاني

الجزء (1) : لتكن g دالة بحيث $g(x) = x - \ln(1-x)$

(1) حدد مجموعة تعريف g و أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x)$

(2) أحسب $g'(x)$ و بين أن g تزايدية قطعاً على $]-\infty, 1[$

(3) أجز جدول تغيرات الدالة g و استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(0) = 0$)

الجزء (2) : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty, 1[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$

(1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln X)^2}{X} = 0$ ثم استنتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ب- بين أن المستقيم $y = x$ (Δ) اتجاه مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

(2) بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ و أعط تايولا هندسياً للنتيجة

(3) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ و بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

(4) أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

ب- أرسم للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ) (نأخذ $1 - e^2 \approx -6,4$)

الجزء (3) : نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - e^2 < U_n < 0$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

(3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

تصحيح الفرض 01

② - صورة A (Z_A) صورة E (Z_E) بالدوران E :

$$Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_E \quad \text{تعني}$$

$$Z_A = i \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right); \quad Z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{حيث}$$

$$Z_A = \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad Z_E = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$Z_A = \frac{Z_B + Z_O}{2} \Leftrightarrow \text{A منتصف } [OB]$$

$$\frac{Z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = Z_A$$

إذن A منتصف [OB].

- 1 - ③

صورة C (Z_C) صورة E (Z_E) بالإضافة T: Z_E = 2i

$$Z_C = Z_E + 2i \quad \text{تعني}$$

$$Z_C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + 2i$$

$$Z_C = \frac{1}{2} + i \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{1}{2} + i \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i}{\sqrt{3} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i}$$

$$= \frac{1 + i(4 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} - i}{2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} + i}$$

$$= \frac{[(1 - \sqrt{3}) + i(3 - \sqrt{3})][\sqrt{3} - i]}{4}$$

$$= \frac{-4i + 4i\sqrt{3}}{4}$$

$$= (\sqrt{3} - 1)i$$

التصحيح الأول :

$$Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0 \quad \text{I}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 12 - 16$$

$$\Delta = -4$$

$$\Delta = (2i)^2$$

$$Z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} \quad \text{أو} \quad Z_2 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2}$$

$$Z_1 = \sqrt{3} + i \quad \text{و} \quad Z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$S = \{ \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i \}$$

II

$$Z_B = \sqrt{3} + i \quad \text{①}$$

$$Z_B = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$Z_B = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_D = \sqrt{3} - i \quad \text{②}$$

$$Z_D = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\left(\frac{b}{d} \right) = \frac{[2, \frac{\pi}{6}]}{[2, -\frac{\pi}{6}]} = [1, \frac{\pi}{3}]$$

$$\arg \left(\frac{b-0}{d-0} \right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$(\vec{OB}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

إذن OBD مثلث متساوي الأضلاع

التمرين الثاني:

الجزء الأول:

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1-x > 0\}$ -1

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

$D_g =]-\infty, 1[$

-2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(1-x)$

$= -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$ لأن

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \ln(1-x)$

$= +\infty$

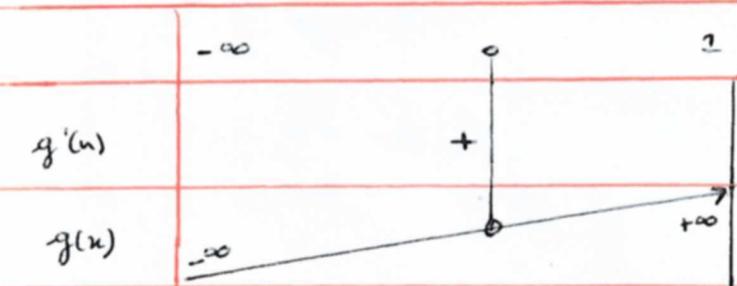
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$

-2 حساب المشتقة $g'(x)$:

$g'(x) = 1 - \frac{(1-x)'}{1-x}$

$g'(x) = 1 + \frac{x}{1-x}$

$g'(x) = \frac{2-x}{1-x} = \frac{x-2}{x-1}$



لدينا على المجال $g(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$; $]-\infty, 0[$

$\forall x \in]-\infty, 0[$ $g(x) < 0$ إذن

وعلى المجال $g(]0, 1[) =]0, +\infty[$ $]0, 1[$

$\forall x \in]0, 1[$ $g(x) > 0$ إذن

نبين أن (CD) واسط [OB].

لدينا OBD مثلث متساوي الأضلاع

و A منتصف [OB]

إذن $(AD) \perp (AB)$

و لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ إذن:

$\arg(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

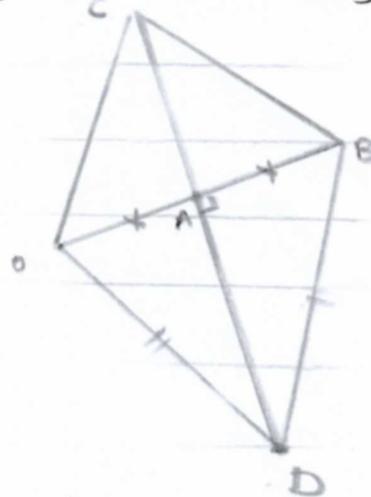
وعليه $(AC) \perp (AB)$

إذن $\angle ABC$ قائم الزاوية في A.

وبالتالي A تنتمي إلى المستقيم (CD)

و A منتصف [OB]

إذن (CD) واسط القطعة [OB].



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + \ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

x	-∞	1
ln(1-x)		+

لأن f غير قابلة للاشتقاق على مسار 1 وبالتالي f يقبل مقارباتاً أسياً x=1

3- حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \ln(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1-x + \ln(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{x - \ln(1-x)}{x-1}$$

$$= \frac{g(x)}{x-1}$$

x	-∞	0	1
f'(x)		+	-
f(x)	-∞	0	-∞

4- الوضع النسبي لـ y=x

$$f(x) - y = \ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$$

$$\ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2 = 0$$

$$\ln(1-x) \left(1 - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2 \right) = 0$$

$$\ln(1-x) = 0 \quad \text{أو} \quad 1 - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2 = 0$$

$$\ln(1-x) = \ln(1) \quad \text{أو} \quad \ln(1-x) = 2$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = -e^2 + 1$$

$$f(x) = x + \ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$$

$$x = 1-x \quad \text{ضع}$$

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x + \ln(x) - \frac{1}{2} (\ln(x))^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln(x))^2}{x} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) - \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) \left(1 - \frac{1}{2} \ln(1-x) \right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{2} \ln(1-x) = -\infty$$

f يقبل فرعاً متديجياً باتجاه المستقيم y=2 بجوار -∞

⑤ رتابة المتتالية u_n

$u_0 = -1$ و $u_1 = -0,54$

$u_0 > u_1$

نفترض ان $u_n > u_{n+1}$

ونريد ان $u_{n+1} > u_{n+2}$

لدينا $u_n > u_{n+1}$

و f تنازلية على $] -\infty, 0[$

اذن $f(u_n) > f(u_{n+1})$

$u_{n+1} > u_{n+2}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$ فاذن

وعليه فان u_n تناقصية.

3- نهاية u_n :

u_n تناقصية ومحدودة بـ $1-e^2$

اذن u_n متقاربة

$u_n(1-n) \rightarrow 0$ متصلة على

$]1-e^2, 0[$

اذن f متصلة على

$f(]1-e^2, 0[) =]1-e^2, 0[$

$f(]1-e^2, 0[) \subset]1-e^2, 0[$

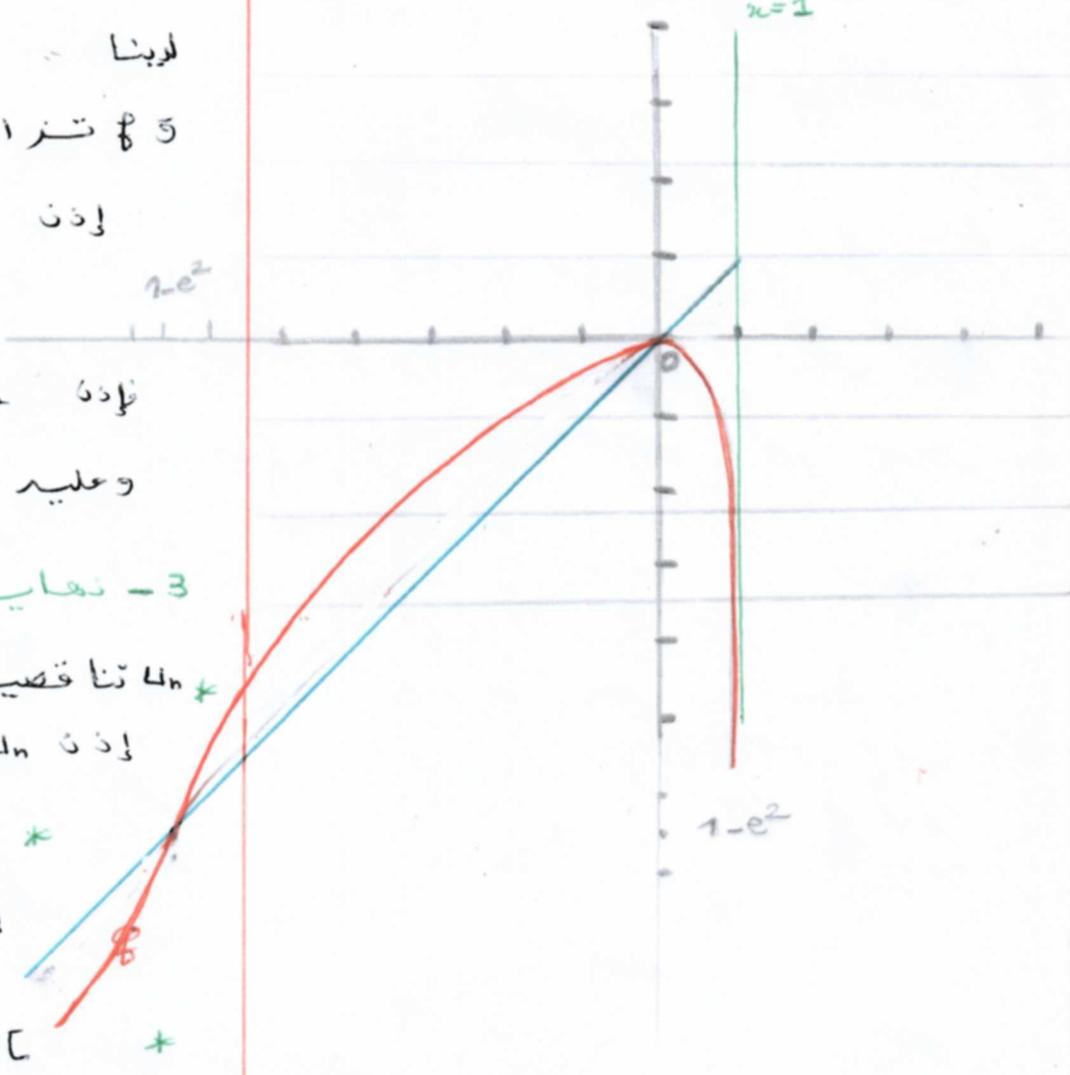
نماية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$

حسب المنحنى: $x = 1-e^2$; $x = 0$

اذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

الجزء: جميع حاكمة

x	$-\infty$	$1-e^2$	0	1
$f(x) - x$		-	+	-
الوضع النسبي لـ f و $y=x$		تحت $y=x$	فوق $y=x$	تحت $y=x$



الجزء 03

1- نبين ان $1-e^2 < u_n < 0$

من اجل $n=0$ $1-e^2 < u_0 = -1 < 0$ (v)

$1-e^2 < u_n < 0$ نفترض ان

$1-e^2 < u_{n+1} < 0$ ونريد ان

لدينا $1-e^2 < u_n < 0$.

و f دالة تنازلية على $]1-e^2, 0[$

اذن $f(1-e^2) < f(u_n) < f(0)$

$1-e^2 < u_{n+1} < 0$