فرض محروس رقم 3

فرض محروس رقم

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 1}$

1) تحقق أن $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ثم بين أن $0 < U_n < \frac{1}{2}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) نضع $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = 6$ و أحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الثاني :

نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

النقط A , B و C لبتي ألحاقها على التوالي هي :

$a = -1 - i$, $b = 5 + i$ و $c = 3 + 7i$

1) أحسب العدد $\frac{b - a}{b - c}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

2) حدد d لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

3) تحقق أن $\frac{c - a}{d - b} = -i$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ثم استنتج أن $ABCD$ مربع

التمرين الثالث :

1) حدد الشكل المثلثي لكل من العددين : $Z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ و $Z_2 = 2 - 2i$

2) استنج أن $Z_1 Z_2 = \left[2\sqrt{6}, \frac{7\pi}{12}\right]$

3) حدد الشكل الجبري للعدد $Z_1 Z_2$ ثم استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

و $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

التمرين الرابع :

الجزء (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 1 - \ln(x + 3)$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايتين $\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن المشتقة $f'(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (2)

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

1) أحسب U_1 ثم قارن U_1 و U_0 (نأخذ $e < 5$)

2) بين أن $-2 \leq U_n \leq 2$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (دون استعمال الحاسبة)

3) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

4) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

تحت إشراف : الأستاذ :
بوشعيب المانسي

تصحيح الفرض 04

Groupe B

من إنجاز التلميذة صالحة
جبوج

التمرين 01 :

1) $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$

$u_{n+1} = \frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}$

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1}$

- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n<\frac{1}{2}$

من أجل n=0 : $0<u_0=\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ (V)

نفترض أن $0<u_n<\frac{1}{2}$

ونبين أن $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

$0<u_n<\frac{1}{2} \Rightarrow 1<2u_n+1<2$

$\Rightarrow -1 < \frac{-1}{2u_n+1} < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

وعليه $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

2) $u_{n+1}-u_n = \frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}$

$= \frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}$

$= \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

* $0<1-2u_n<1$

$0<2u_n+1<1$ و

إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وعليه u_n تزايدية.

3) $V_{n+1} = \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$V_{n+1} = \frac{3^{n+1}\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}$

$V_{n+1} = \frac{3^{n+1}\times 2u_n}{2u_n-1}$

$V_{n+1} = \frac{3^n\times 3\times 2u_n}{2u_n-1}$

$V_{n+1} = \frac{6\times 3^n u_n}{2u_n-1}$

$V_{n+1} = 6V_n$

ومنه V_n متتالية هندسية أساسها 6 .

$V_n = V_0 q^n \Leftrightarrow V_n = -\frac{1}{3}\times 6^n$

ب- $V_n = \frac{3^n u_n}{2u_n-1} \Leftrightarrow V_n(2u_n-1)=3^n u_n$

$\Leftrightarrow u_n(2V_n-3^n)=V_n$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{V_n}{2V_n-3^n}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-\frac{6^n}{3}}{-\frac{2\times 6^n}{3}-\frac{3^{n+1}}{3}}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{6^n}{2\times 6^n+3^{n+1}}$

$u_n = \frac{\cancel{3^n}\times 2^n}{\cancel{3^n}(2^{n+1}+3)}$

$u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{2^n}}$

$= \frac{1}{2}$

" $2>1$; $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2^n}=0$ "

$(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *

$\frac{|c-a|}{|d-b|} = 1$

أي $|c-a| = |d-b|$

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $AC = BD$.

إذن ABCD مربع.

التمرين 03:

1- $Z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$|Z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{3}$.

$\cos\theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$

$Z_1 = \left[\sqrt{3};\ \frac{5\pi}{6}\right]$

$Z_2 = 2 - 2i$

$|Z_2| = \sqrt{4+4}$

$= 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$Z_2 = \left[2\sqrt{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$

التمرين 02:

1) $\frac{b-a}{b-c} = \frac{5+i+1+i}{5+i-3-7i}$

$= \frac{6+2i}{2-6i}$

$= i$

و $\left|\frac{b-a}{b-c}\right| = 1$.

$|b-a| = |b-c| \Leftrightarrow AB = BC$

$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B.

2) ABCD متوازي الأضلاع $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow aff(\overrightarrow{AB}) = aff(\overrightarrow{DC})$

$\Leftrightarrow b-a = c-d$

$\Leftrightarrow d = c-b+a$

$\Leftrightarrow d = 3+7i-5-i-1-i$

$d = 5i-3$

3) $\frac{c-a}{d-b} = \frac{3+7i+1+i}{5i-3-5-i}$

$= \frac{8i+4}{4i-8}$

$= \frac{2i+1}{i-2} = \frac{(1+2i)(-2-i)}{5}$

$= -\frac{5i}{5}$

$= -i$

حساب: $\lim_{x\to+\infty} x+1-\ln(x+3)$

$$\lim_{x\to+\infty} x+1-\ln(x+3) = \lim_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{x+1}{x+3}-\frac{\ln(x+3)}{(x+3)}\right)$$

$$= +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+3} = 1$; $\lim_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ »

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 0$ »

حساب: $\lim_{x\to-3^+} f(x)$

$$\lim_{x\to-3^+} x+1-\ln(x+3) = +\infty$$

لأن «$\lim_{x\to-3^+} \ln(x+3) = -\infty$

$\lim_{x\to-3^+} x+1 = -2$ »

2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x+3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x(1+\frac{3}{x}))}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{x}$$

$$= 1$$

لأن: «$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{x} = 0$ »

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} 1-\ln(x+3)$$

$$= -\infty$$

«$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3) = +\infty$»

إذن $\mathcal{C}_f$ يقبل فرعا شلجميا باتجاه المستقيم: $y=x$

3

$$Z_1\times Z_2 = \left[2\sqrt{2}\times\sqrt{3} ; \frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \left[2\sqrt{6} ; \frac{7\pi}{12}\right]$$

- تحديد الشكل الجبري لـ $Z_1\times Z_2$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$

$$Z_1\times Z_2 = \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2-2i\right)$$

$$= -3+\sqrt{3}+i\left(6+\sqrt{3}\right)$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-3)}{12}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{6+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(6+\sqrt{3})}{12}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

التمرين 04:

الجزء 1:

+ تحديد D_f:

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \mid x+3>0\}$$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} \mid x>-3\}$$

$$D_f =]-3;+\infty[$$

3 - أ - حساب المشتقة :

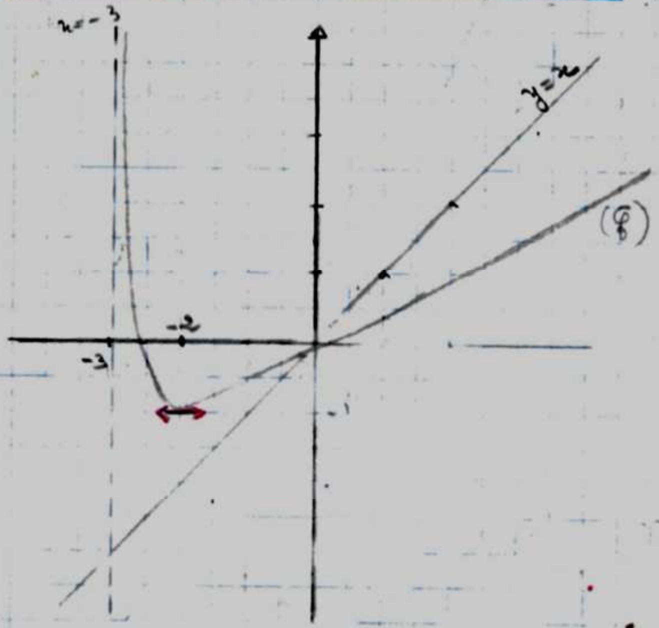
$$f'(x) = 1' - \frac{(x+3)'}{x+3} + x'$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x+3} + 1$$

$$f'(x) = \frac{x+3-1}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

x	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



الجزء ① :

1 - $u_1 = f(u_0) \Leftrightarrow u_1 = 2+1-\ln(5)$

$u_1 = 3-\ln(5)$

لدينا $e<5 \Leftrightarrow \ln e < \ln 5$

$\Leftrightarrow -1 > -\ln 5$

$\Leftrightarrow 2 > 3-\ln 5$

$\Leftrightarrow u_0 > u_1$

2 - نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ -2 \le u_n \le 2$

من أجل $n=0$ $\quad -2 \le u_0 = 2 \le 2$ (V)

نفترض أن $-2\le u_n\le 2$

ونبين أن $-2\le u_{n+1}\le 2$.

لدينا $-2\le u_n\le 2$ و f تزايدية

على المجال $[-2,2]\subset[-2;+\infty[$

إذن $f(-2)\le f(u_n)\le f(2)$ $\quad f(2)=3-\ln 5<2$

$-2\le -1\le u_{n+1}\le 2$

$-2\le u_{n+1}\le 2$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\ -2\le u_n\le 2$

3 - رتابة u_n :

لدينا $u_0>u_1$

نفترض أن $u_n>u_{n+1}$

ولنبين أن $u_{n+1}>u_{n+2}$

لدينا $u_n>u_{n+1}$

و f تزايدية على المجال $[-2,2]$

$f(u_n)>f(u_{n+1})$

$u_{n+1}>u_{n+2}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>u_{n+1}$

وعليه فإن u_n تناقصية.

4 - لدينا u_n تناقصية ومحدودة ب -2

إذن متقاربة

* f مستمرة و $u_0\in[-2,2]$

$f([-2,2]) = [-2;\ 3-\ln(5)] \subset [-2,2]$

إذن نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x \Leftrightarrow 1-\ln(x+3)=0$

$\ln(x+3)=\ln e$

$x=e-3$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = e-3$