

الصفحة

1  
5

♦♦

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
المسالك الدولية – خيار فرنسية  
الدورة العادية 2019  
- الموضوع -

\*\*\*\*\*

NS24F

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني  
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب) – خيار فرنسية	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques .....(3.5 pts)

- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes .....(3.5 pts)

- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)

- L'exercice4 se rapporte à l'analyse .....(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

**EXERCICE1** : (3.5 points)

On rappelle que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif et que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire

de zéro la matrice nulle  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit  $*$  la loi de composition interne définie sur  $\mathbb{C}$  par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

0.25 1-a) Montrer que la loi  $*$  est commutative sur  $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que la loi  $*$  est associative sur  $\mathbb{C}$

0.25 c) Montrer que la loi  $*$  admet un élément neutre  $e$  que l'on déterminera.

0.25 d) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Montrer que le nombre complexe  $x + yi$  admet le nombre complexe

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i \text{ comme symétrique pour la loi } *$$

2-On considère le sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{C}$  défini par :  $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

0.25 a) Montrer que  $E$  est stable pour la loi  $*$  dans  $\mathbb{C}$

0.5 b) Montrer que  $(E, *)$  est un groupe commutatif.

0.5 3-On considère le sous-ensemble  $G$  de  $E$  défini par :  $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$

Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $(E, *)$

4-On considère l'ensemble  $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \right\}$

0.25 a) Montrer que  $F$  est stable pour la loi  $\times$  dans  $M_2(\mathbb{R})$

0.5 b) Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  vers  $F$  qui à tout nombre complexe  $x + yi$  de  $E$  fait correspondre

$$\text{la matrice } M(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \text{ de } F$$

Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(E, *)$  vers  $(F, \times)$

0.25 c) En déduire que  $(F, \times)$  est un groupe commutatif.

**EXERCICE2** : (3.5 points)

Soit  $m$  un nombre complexe non réel ( $m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ )

I- On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation d'inconnue  $z$  définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation  $(E)$  est non nul.

0.5 b) Déterminer  $z_1$  et  $z_2$ , les deux solutions de l'équation  $(E)$

2- On suppose dans cette question que  $m = e^{i\theta}$  avec  $0 < \theta < \pi$

0.5 a) Déterminer le module et un argument de  $z_1 + z_2$

0.25 b) Montrer que si  $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$  alors  $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants :

$A$  le point d'affixe  $a = 1 + i$ ,  $B$  le point d'affixe  $b = (1 + i)m$ ,  $C$  le point d'affixe

$c = 1 - i$ ,  $D$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $\Omega$  le milieu du

segment  $[CD]$ .

0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point  $\Omega$  est  $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 b) Calculer  $\frac{b-a}{\omega}$

0.5 c) En déduire que  $(O\Omega) \perp (AB)$  et que  $AB = 2O\Omega$

2- La droite  $(O\Omega)$  coupe la droite  $(AB)$  au point  $H$  d'affixe  $h$

0.5 a) Montrer que  $\frac{h-a}{b-a}$  est un réel et que  $\frac{h}{b-a}$  est un imaginaire pur.

0.25 b) En déduire  $h$  en fonction de  $m$

**EXERCICE3** : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un **nombre premier**.

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels vérifiant :  $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1- On suppose dans cette question que 2969 **ne divise pas**  $n$

0.5 a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que :  $(\exists u \in \mathbb{Z}) ; u \times n \equiv 1 \pmod{2969}$

0.5 b) En déduire que :  $(u \times m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$  et que  $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

(On remarque que :  $2968 = 8 \times 371$  )

0.5 c) Montrer que 2969 ne divise pas  $u \times m$

0.5 d) En déduire qu'on a aussi  $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \pmod{2969}$

0.5 2-a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 **divise**  $n$

0.5 b) Montrer que :  $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2969}$  et  $m \equiv 0 \pmod{2969}$

**EXERCICE4** : (10 points)

**PARTIE I** : On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 4x \left( e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

et on note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5 2- a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

0.75 b) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , puis donner son tableau de variations.

0.5 c) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left] \frac{3}{2}, 2 \right[$  tel que  $f(\alpha) = 0$

(On prendra  $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$  )

0.25 d) Vérifier que :  $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

0.5 3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction  $f'$ , montrer qu'il existe un réel  $x_0$  de l'intervalle  $]0,1[$  tel que :  $f''(x_0) = 0$

0.5 b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $f''$ , montrer que, pour tout

réel  $x$  différent de  $x_0$  de l'intervalle  $[0,1]$ , on a :  $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

- 0.25 c) En déduire que  $I(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C)$
- 0.5 4-a) Etudier les branches infinies de la courbe  $(C)$
- 0.5 b) Représenter graphiquement la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
(On prendra :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ ,  $f(1) = -0.5$  et il n'est pas demandé de représenter le point  $I$ )
- 0.25 5-a) Vérifier que :  $(\forall x \in ]-\infty, \alpha])$  ;  $f(x) \leq 0$
- 0.75 b) Montrer que :  $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3} \alpha (\alpha^2 - 3)$ , en déduire que :  $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$
- 0.5 c) Calculer en fonction de  $\alpha$ , en  $cm^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations respectives :  $y=0$ ,  $x=0$  et  $x=\alpha$

**PARTIE II :** On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n$$

- 0.5 1-a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < \alpha$  (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)
- 0.25 b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- 2- On suppose que  $0 \leq u_0$  et on pose  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
- 0.5 a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$  (On prendra :  $\ln 2 = 0.69$ )
- b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n$
- 0.5 (On remarque que :  $f(x) + x = 4xg(x)$ )
- 0.25 c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- 0.5 d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 3- On suppose que  $u_0 < 0$
- 0.5 a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0 + nf(u_0)$
- 0.25 c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

FIN